华章数学译丛

21

Elements of Wavelets for Engineers and Scientists

小波基础及应用教程

(美) Dwight F. Mix
Kraig J. Olejniczak 著

杨志华 杨力华 译



机械工业出版社
China Machine Press

小波基础及应用教程

本书帮助那些在非数学领域工作的专业人员理解小波这一非常数学化的高深主题，并为在更严格的数学层面上进一步学习小波奠定基础。本书包含详细的讨论与精心设计的实例、图表以及练习，为读者理解基本概念提供了循序渐进的指导。这些基本概念包括向量空间、度量、范数、内积、基、维数、双正交性和矩阵等。除此之外，本书还包括许多新的小波应用，如图像压缩、湍流、模式识别等。这些应用是近年来由一些不同领域（如量子物理和地震地质学这样的学科）交叉而发展起来的。

作者简介

Dwight F. Mix 博士，专业工程师，阿肯色大学荣誉教授，1965~1998年在该校电子工程系任教。

Kraig J. Olejniczak 博士，专业工程师，瓦尔帕莱索大学工程学院院长，1991~2002年在阿肯色大学电能系任教。

Elements of Wavelets for Engineers and Scientists



www.wiley.com



华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68995259, 68995264

读者信箱：hzjsj@hzbook.com





华章图书

ISBN 7-111-18390-8/O · 479

定价：29.00 元

封面设计 · 杨宇梅

华 章 数 学 译 丛

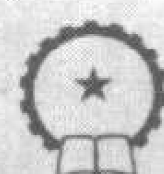
21

Elements of Wavelets for Engineers and Scientists

小波基础及应用教程

（美） Dwight F. Mix
Kraig J. Olejniczak 著

杨志华 杨力华 译


机械工业出版社
China Machine Press

本书是一本通过大量实例讲述小波与经典信号处理之间关系的入门书籍，主要内容包括：函数与变换、采样定理、多采样率处理、快速傅里叶变换、小波变换、正交镜像滤波器、实用小波和滤波器等．除此之外，本书还包括小波的一些典型应用，如图像压缩、湍流、模式识别等．

本书叙述简洁、实例丰富，适合于各类工程技术人员、计算机程序员和学生，对于数学专业人员，本书也有参考价值．

Dwight F. Mix and Kraig J. Olejniczak: Elements of Wavelets for Engineers and Scientists (ISBN 0-471-46617-4).

Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

Copyright © 2003 by John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved.

本书中文简体字版由约翰-威利父子公司授权机械工业出版社独家出版．未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容．

版权所有，侵权必究．

本书法律顾问　北京市展达律师事务所

本书版权登记号：图字：01-2005-0786

图书在版编目(CIP)数据

小波基础及应用教程/(美)米克斯(Mix, D.F.)等著；杨志华，杨力华译．—北京：机械工业出版社，2006.4

(华章数学译丛)

书名原文：Elements of Wavelets for Engineers and Scientists

ISBN 7-111-18390-8

Ⅰ．小…　Ⅱ．①米…　②杨…　③杨…　Ⅲ．小波分析—教材　Ⅳ．O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 004677 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)

责任编辑：王　彦　迟振春

北京牛山世兴印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2006 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1020mm 1/16·12.25 印张

定价：29.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

三年前，我与人合作翻译了 Stephane Mallat 的名著《信号处理的小波导引》(英文名为 A Wavelet Tour of Signal Processing，机械工业出版社，2002 年).无论从数学理论还是小波的工程背景而言，此书堪称经典. 然而，由于此书内容庞大而且涉及面很宽，我们在一年内所做的翻译未能有精雕细琢的工夫. 坦率地说，留给了译者些许不能排遣的遗憾，于是不愿再译书. 因此，当今年上半年机械工业出版社找到我，希望我为本书做翻译时，便客气地回绝了. 然而该社的编辑很有心，央我先看看，并很快将该书的英文版寄给了我. 粗粗翻过之后，觉得本书的确不失为工程技术人员学习小波入门知识的好书. 它不是一本学术专著，不涉及小波的构造与数学推演，而是一本通过大量实例讲述小波与经典信号处理之间关系的入门读物. 在这本小册子里，小波算法同滤波和采样处理浑然天成，互为表里，相得益彰，是可用于教学的好素材. 正巧本书的第一译者杨志华博士对此书的翻译有兴趣，并答应承担主要的翻译工作. 这样，我们便接下了本书的翻译.

本书尤其适合于那些希望学习和使用小波，却不具备专业数学修养的工程技术人员；对于正在研究小波的数学理论而希望在短时间内较简单与直观地了解小波之信号处理背景的专业数学家，本书也极具参考价值.

我们对本书尽力了，可以负责任地说，本书的翻译质量基本上没有问题. 倘若还有疏忽之处，敬请读者不吝指正.

本书的翻译工作得到国家自然科学基金(No.：60475042)与广东省自然科学基金(No.：036608)的资助.

杨力华

2005 年 10 月于广州

前　言

现在，市面上关于小波的书已超过150种，而且还在继续增加．其中，不乏被业内人士奉为“上乘”的著作．既然如此，为什么还要写作本书呢？

一年多以前，我们决定在当时正在编写的教科书中添加一两章关于小波的内容．开始这部分内容的写作之前，我们计划研读一些相关的文章和教材，以便对小波有更好的了解．没想到找到的文献都十分深奥．尽管我们尽力查找，但还是没有找到一本专门讲解有关此课题数值实例的著作．在关于小波的书籍中，包含计算实例的书少之又少．经过一段时间的研究，我们相信为科技工作者和工程技术人员提供一本小波的入门书籍是必要的，它可以作为前面提到的150多种小波书籍的前期读物．

本书主要面向非数学专业而又想了解小波的读者．我们的主要目的是帮助读者尽可能有效地理解并记住那些十分深奥的数学理论．此外，我们还希望本书能够为读者做好概念上的准备，以便他们能进一步阅读数学上更加严谨的小波教材．本书力求简单，但用爱因斯坦的话来说，“不宜更简单”．小波这门学科的现状决定了本书不可能避免较深奥的数学概念，但本书力图通过丰富的实例、图表和练习来解释这些深奥的数学理论，篇幅不长却包含88个实例、145个图表和40个练习．而且，所有实例都有解答，其中大多数是可数值计算的．

本书的读者必须具有理工科大学毕业生所应该具备的数学基础，包括微积分、幂级数、集合论以及少量与代数或几何相关的高等数学知识．数学变换方面的知识对于理解本书也有帮助．对任何一个新题材，读者对相关背景知识越熟悉，理解时就会越容易．

预祝读者度过一次令人愉快的“小波”之旅！

Dwight F. Mix (Ph. D., P. E.)于阿肯色州菲叶维尔

Kraig J. Olejniczak (Ph. D., P. E.)于印第安纳州瓦尔帕莱索

2003年3月9日

目　录

第1章　函数与变换

本书的目的是向读者讲述快速傅里叶变换和小波变换．本章给出变换的一般思想，并引入一些必要的术语．主要内容包括变换、域和信号分类．有关快速傅里叶变换和小波变换的内容将在后续章节中详细讨论．

本章目标　**读完本章以后，读者应该掌握：**

- 定义变换．
- 确定一个给定信号是功率信号还是能量信号．
- 对一个给定的长度为4的离散时间信号，能够计算出其离散傅里叶级数和哈尔变换．

1.1　小波变换

有两种方法来确定一个给定信号的小波变换．大多数的变换只能够通过一种方式，即通过公式来确定．例如，我们通过下式来计算时间函数 $v(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$V(s)=\int_{-\infty}^{\infty}v(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

小波变换也有一个类似的公式．但是，本章要介绍确定小波变换的另外一种方式，这第二种方式即是我们在实际中计算小波变换的方式．

我们先看一个连续时间信号在某个时间段的例子，并假设该时间段足够长，包含1 024个样本．将离散化以后的信号并行地输入到两个数字滤波器，如图1-1所示．其中，H_0 是低通滤波器，H_1 是高通滤波器，$s(n)$ 是输入，$c(n)$ 和 $d(n)$ 是输出．记号"↓2"表示按2下采样，即每间隔一个点扔掉一个样本．保留第1，3，5，…个样本，扔掉第2，4，6，…个样本．按此原则，$c(n)$ 和 $d(n)$ 均只包含512个样本．

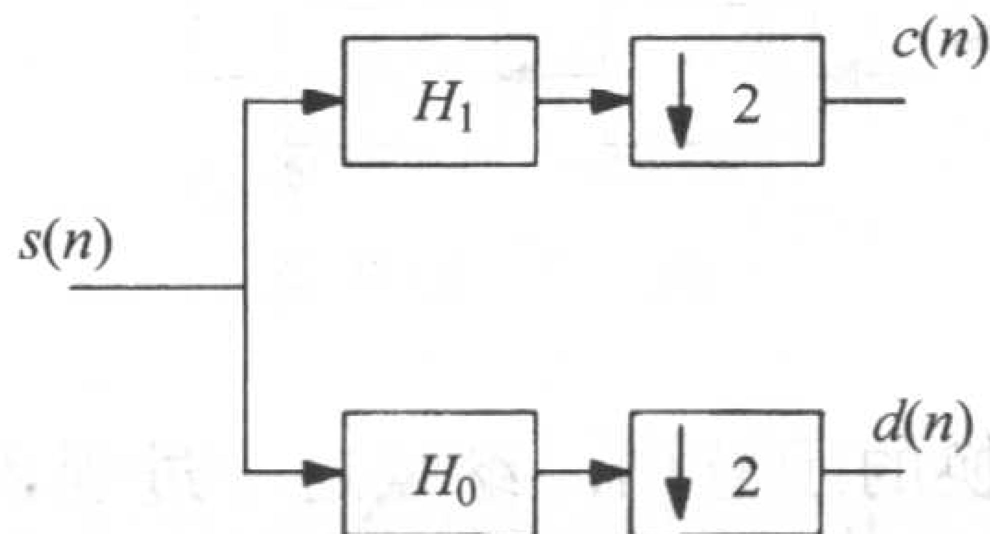


图1-1　第一级变换

长度为 512 项的 $d(n)$ 表示信号变换的一部分(实际上是变换的一半),变换的另一半需要用类似的滤波-下采样从 $c(n)$ 中抽取. 图 1-2 准确地说明了这一处理过程. 图中第一级滤波-下采样的输出包含 512 个样本,由于 $2^9=512$,因此,把它们分别记为 c_9 和 d_9. 类似地,由于第二级滤波-下采样的输出项长度为 256,因此,把它们记为 c_8 和 d_8. 长度为 256 的 d_8 表示信号变换的另外四分之一. 至此,读者应该不难知道怎样计算信号变换的剩余各项了. 使 c_8 再通过滤波-下采样就可以得到 c_7 和 d_7,它们均包含 128 项.

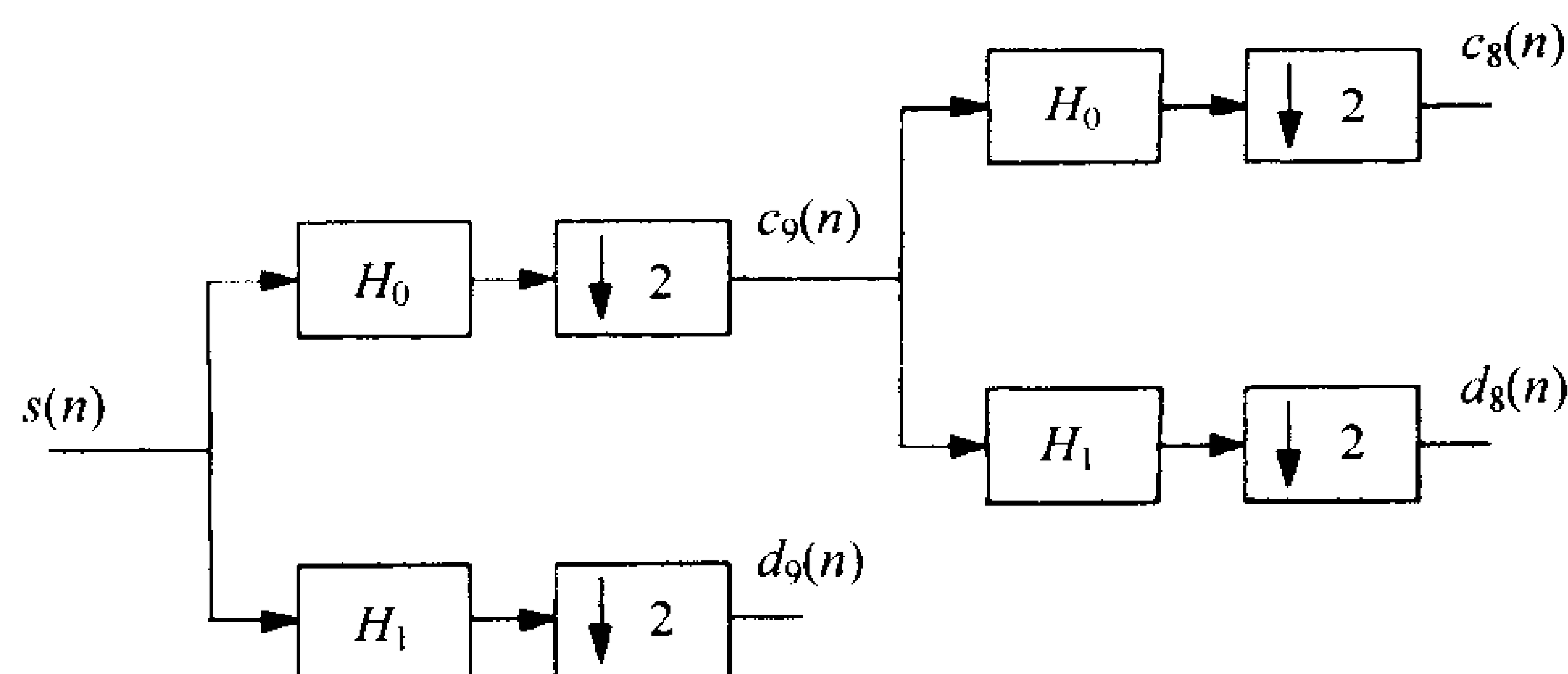


图 1-2 前两级变换

小波变换包含的项数与原信号的项数相同,在本例中项数为 1 024. 变换中的各项分别由 d_9(512 个样本)、d_8(256 个样本)、d_7(128 个样本)、d_6(64 个样本)、d_5(32 个样本)、d_4(16 个样本)、d_3(8 个样本)、d_2(4 个样本)、d_1(2 个样本)、d_0(1 个样本)再加上 c_0 项组成.

1 ~ 2

逆变换可以通过反向执行这一过程得到. 从 c_0 和 d_0 项开始,将它们并行地输入到两个数字滤波器中,如图 1-3 所示. 图中,记号"↑2"表示按 2 上采样,即在每两个样本之间插入一个零. 例如,长度为 4 的信号{1, 2, −1, 3},上采样的结果为{1, 0, 2, 0, −1, 0, 3, 0},长度变成了 8. 最初,每个上采样滤波器的输入只包含一个样本,输出包含两个样本. 若选取合适的滤波器 H_2 和 H_3,第一层输出将是 $c_1(n)$.

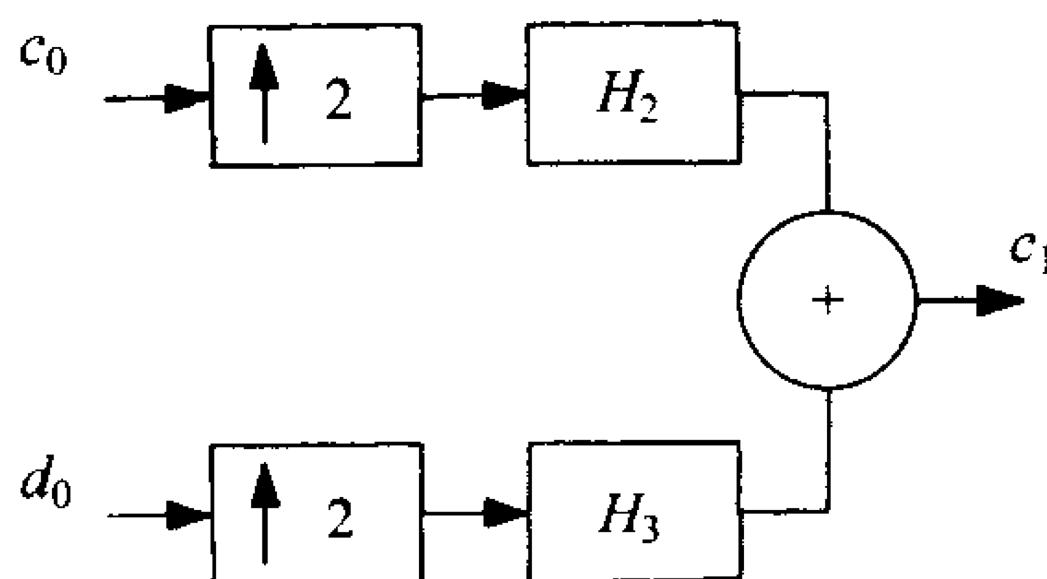


图 1-3 逆变换

图 1-4 是前两级逆变换的示意图. 继续这一过程,直到最后的输出为原信号 $s(n)$ 为止. 注意,在这一过程中,我们必须在相应的各级中分别输入 $c_0(n)$,

$d_0(n)$，$d_1(n)$，$d_2(n)$，…，$d_9(n)$，它们是我们在正向过程中保存下来的，称之为变换.

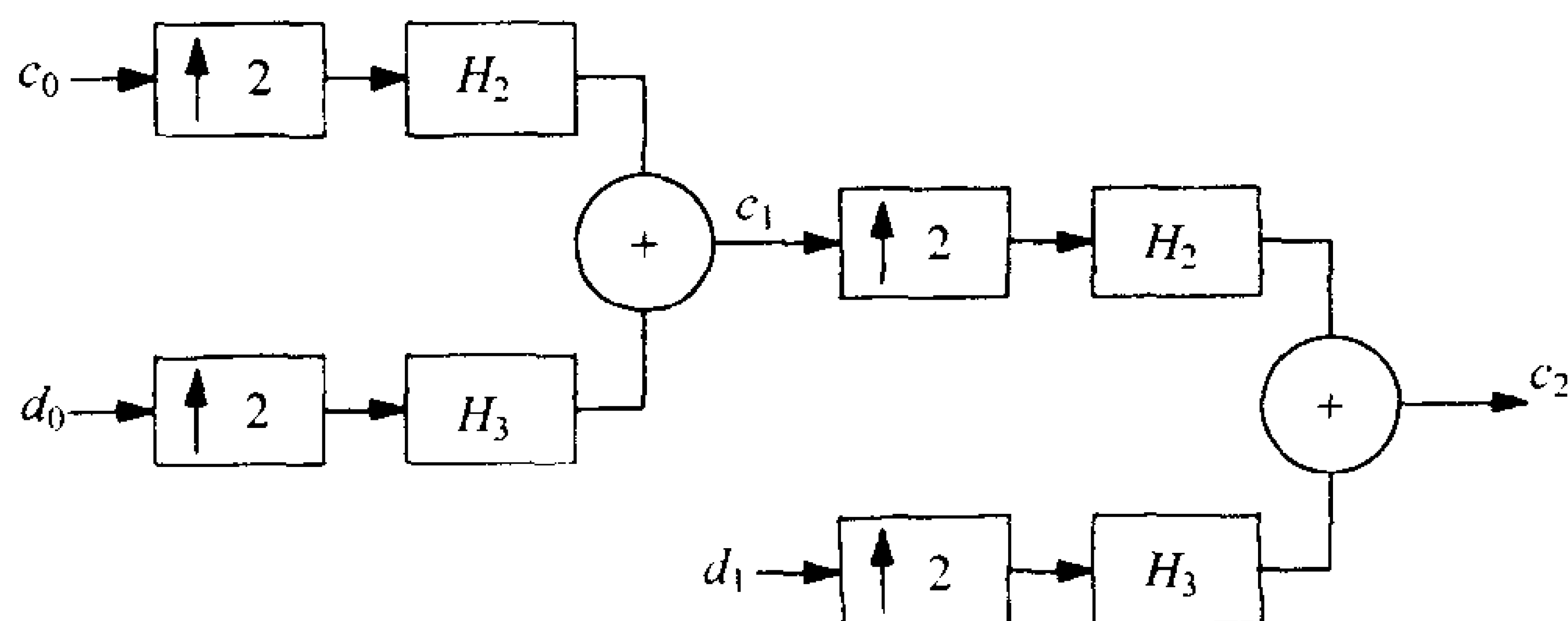


图 1-4 前两级逆变换

在上述过程中，我们很少谈及滤波器，只简单地把 H_0 称为低通滤波器，把 H_1 称为高通滤波器. 然而，这些滤波器应该具有什么性质？它们之间有着怎样的关系？如果我们知道 $c_0(n)$，$d_0(n)$，$d_1(n)$，$d_2(n)$，…，$d_9(n)$与 $s(n)$包含相同的信息，现在就可以回答其中部分问题. 本书后面的内容将给出足够的资料和分析来回答这里的大多数问题. 3

考虑 H_0 和 H_1 的关系. 图 1-5 给出了不能正常工作的情形. 我们希望所有频率成分都能通过这两个滤波器中的一个，对于数字信号而言，这意味着它们必须使得所有 $0\leqslant\Omega<2\pi$ 内的频率成分都能通过. 而由图 1-5 可以看到，$2\pi/3$ 至 π 之间的频率成分被滤掉了，它们不能通过任何一个滤波器. 也就是说，这样的滤波器不能保留信号的完整信息.

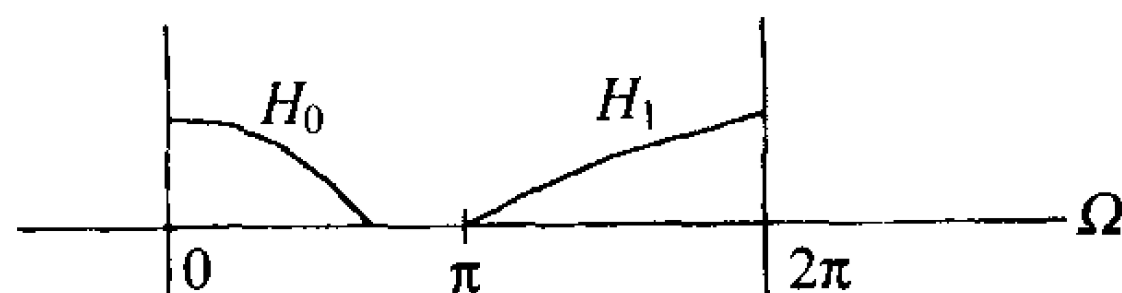
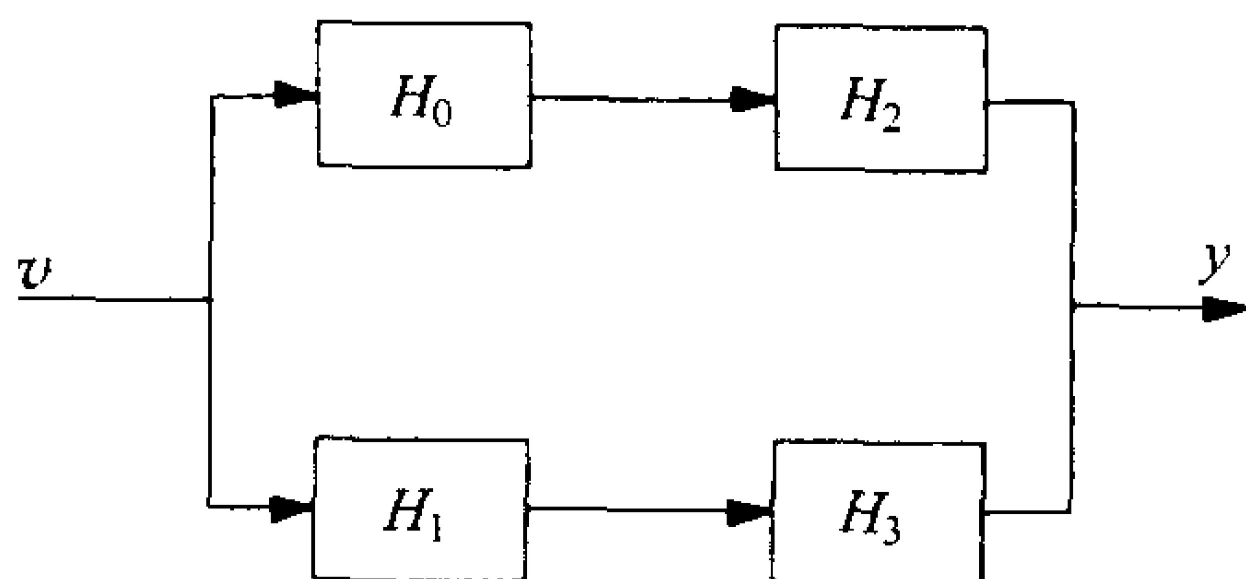


图 1-5 两个频率响应

图 1-6 所示是一个滤波器组. 这个滤波器组描述了在去掉下采样(↓2)和上采样(↑2)运算的情况下四个滤波器之间的关系. 先考虑 H_0 和 H_2，即图 1-6 的上半分支. 假如输出 y 包含输入 ν 的所有信息，那么，H_2 也必须是低通的. 相反地，假设 H_0 是低通的而 H_2 是高通的，那么所有频率成分都将被滤掉而不能通过上半分支. 类似地，假如 H_1 是高通的，H_3 也必须是高通的.

然而，仍有许多问题需要回答. 这四个滤波器究竟有怎样的确切关系呢？传统的滤波器组能够使得所有的信息通过如图 1-6 所示的滤波过程，从输入端到达输出端吗？在设计小波时，只需要考虑信息的保留吗？请接着往下看，假如这些问题能够轻易解答，那么本书就没有任何必要了.



4

图 1-6 四个滤波器的滤波器组

1.2 变换

变换是一种特殊的函数. 要理解什么是变换，首先要理解函数的概念. 回顾函数的定义，我们知道，函数(function)是定义域(domain)和因变域(codomain)两个集合之间的一种对应关系. 这种对应关系应同时满足以下两个条件：第一，定义域中的任一元素一定对应于因变域中的某个元素；第二，因变域中不存在不同的两个元素与定义域中的同一个元素相对应. 这两个条件也可以归结为一句话：对定义域中的每个元素在因变域中都有唯一的一个元素与之对应.

图 1-7 给出了映射或函数的示意. 我们将其记为 $f: A\to B$，并称之为函数 f，称 A 为定义域，B 为因变域. 注意，定义域 A 中的每一个元素在因变域 B 中都有一个元素与之对应(满足条件 1)；在 B 中不存在两个元素与 A 中的同一元素相对应(满足条件 2). 但是，A 中的不同元素可以与 B 中的同一元素相对应.

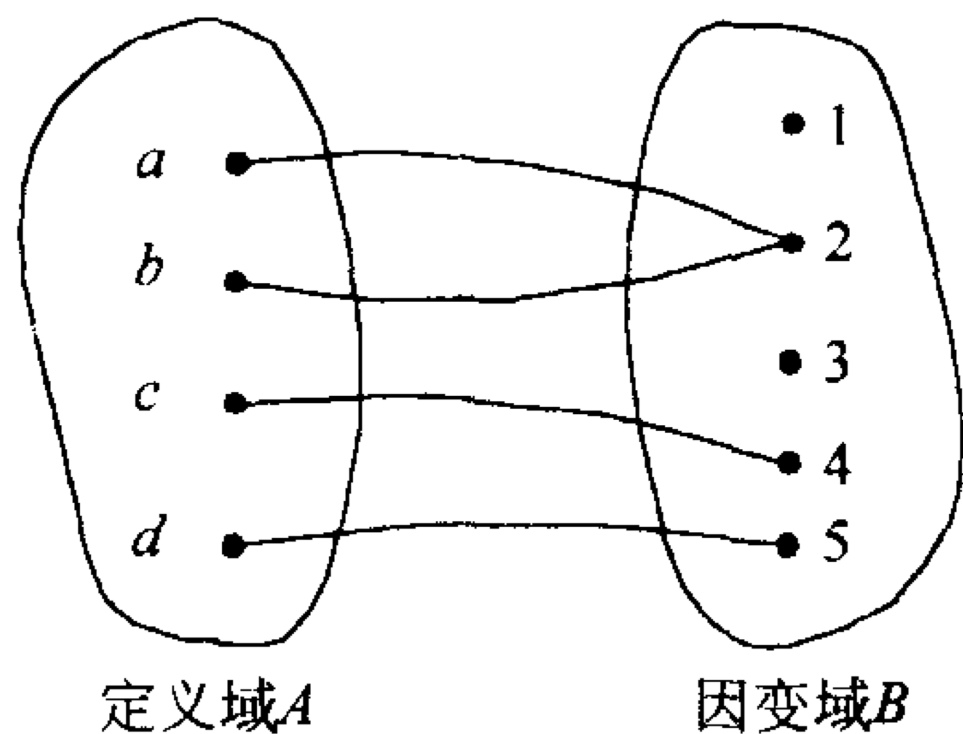


图 1-7 函数 $f: A\to B$

在这个例子中，定义域是集合$\{a, b, c, d\}$，而因变域是集合$\{1, 2, 3, 4, 5\}$. 值域(range)是集合$\{2, 4, 5\}$. 值域由 B 中那些在 A 中有原象的元素组成，它们是 B 的一个子集. 值域与因变域可以是不同的集合，此时值域是因变域的一个子集. 在数学上严格区分值域和因变域只是近几年的事，而在以前，它们被统称为值域，也导致了一些混淆.

函数的另一个定义是将函数定义为一个有序对的集合，其中各有序对的第一个元素不能重复. 考虑下面的三个有序对集合.

$(a, 2)$ $(a, 2)$ $(a, 1)$
$(b, 2)$ $(b, 2)$ $(b, 2)$
$(c, 4)$ $(a, 4)$ $(c, 4)$
$(d, 5)$ $(d, 5)$ $(d, 5)$

5

其中，第一列表示图 1-7 中的函数 f. 第二列不是函数，因为在第二列的有序对中第一个元素 a 重复出现了. 第三列也是一个函数.

定义 1.1 函数 $f: A \to B$ 为两个集合 A 和 B 之间的一种对应关系，它满足条件：对第一个集合中的每一个元素在第二个集合中存在唯一的元素与之对应.

函数又称为映射(map 或 mapping). 最初，函数的概念只适用于数，定义域和因变域都由数组成. 这一类函数可以用图示或公式来表示. 现在的函数可以是任何两个集合之间的对应关系，只要它们满足函数的两个性质. 下面是一个函数的例子，其中，定义域和因变域都与数没有关系.

假设有一个装满了卡片的篮子，每张卡片上有一条指令. 你走到篮子前挑选一张卡片并执行卡片上的指令. 这是一个函数，定义域是一篮子写有指令的卡片，因变域是你可能执行的所有操作的集合，而值域是实际可能执行的操作(卡片上的指令)的集合，它是因变域的一个子集.

按现有的说法，值域是因变域中在定义域中有原象的那些元素. 图 1-8 把定义域和因变域都表示成篮子. 从标记为 f 的盒子里出来的所有 y 值都落入因变域的一个子集中，这个子集被称为值域. 以函数 $y=x^2$ 为例，假如定义域和因变域是所有实数的集合，那么值域就是所有非负实数的集合. 在这个例子中，值域是因变域的一个真子集(就是说因变域中的某些元素不属于值域).

现在我们来考虑变换. 在这里，我们所关心的是那些定义域和因变域都不是数值的函数. 这类特殊的函数被称为*变换*(transform)或*算子*(operator)，它们是定义域和值域本身为函数集的函数. 假如把图 1-8 看成一个变换，那么，所有的篮子装的都是函数而不是数. 再如傅里叶变换，其定义域是时间的函数，而因变域是频率的函数. 傅里叶变换公式如下：

6

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t$$

我们可以这样来考虑图 1-8 所示的关系. 选取一个时间函数 $v(t)$，将其输入到标记为 f 的黑盒子中；在黑盒子中，将时间函数 $v(t)$ 与指数函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ 相乘，然后将乘积在整个时间轴上求积分；黑盒子的输出结果是落入值域的频率函数 $V(\omega)$. 定义域由所有存在傅里叶变换的时间函数组成，而值域由所有与这些时间函数对应的频率函数组成. 变换的基本思想是映射，其定义域和因变域都是函数.

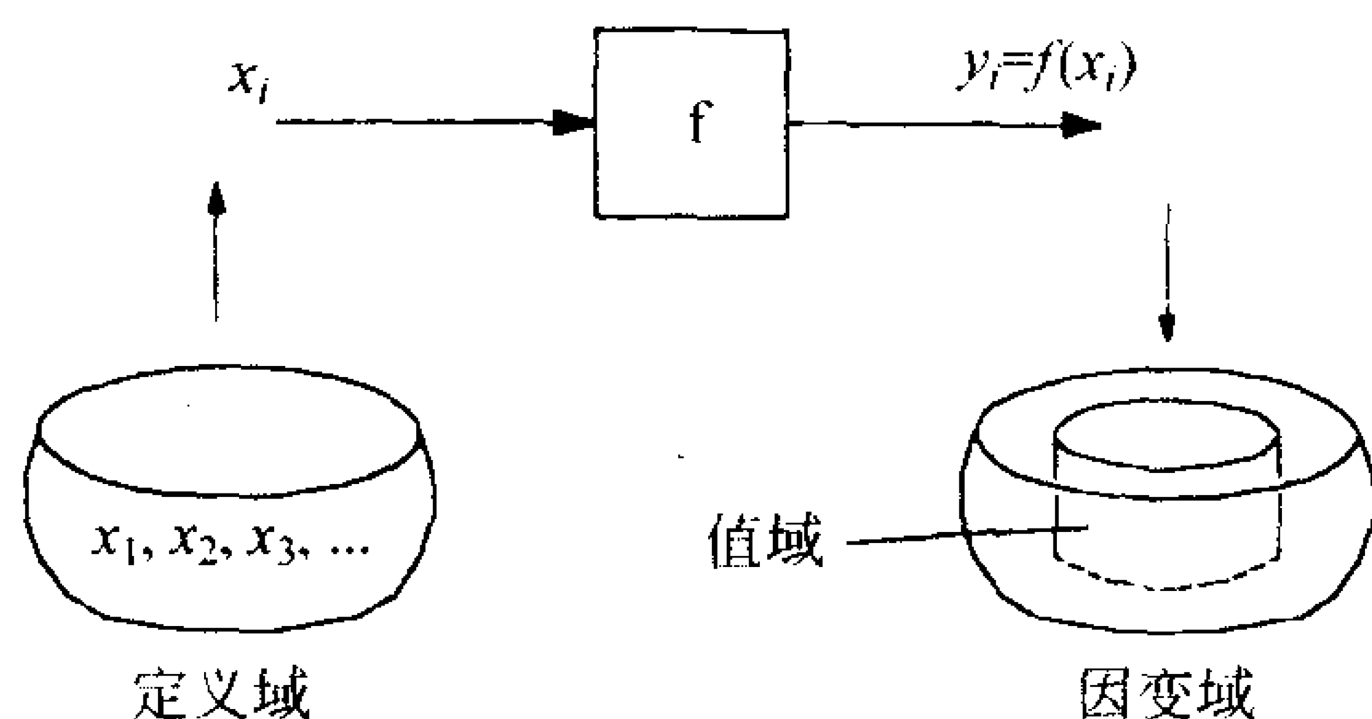


图 1-8 函数概念示意图

域

另一个需要理解的概念是域(field). 考虑具有加法和乘法两种运算的普通数，它提供了一个用于定义域的模型. 所有在其上定义了两种运算的集合，当满足以下定义时，就被称为域.

定义 1.2 设 A 是由元素$\{a, b, c, \cdots\}$所构成的集合，则域$(A, +, \cdot)$就是在其上定义了"+"和"·"两种运算的一个集合. 运算"+"和"·"分别被称为加法(addition)和乘法(multiplication)，满足如下条件：

(i)$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，对集合 A 中的所有元素 a，b，c 成立.

(ii)$a+(b+c)=(a+b)+c$，对集合 A 中的所有元素 a，b，c 成立.

(iii)$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$，对集合 A 中的所有元素 a，b，c 成立.

(iv)$a+b=b+a$，对集合 A 中的所有元素 a，b 成立.

(v)$a\cdot b=b\cdot a$，对集合 A 中的所有元素 a，b 成立.

7

(vi)在集合 A 中存在元素 0，使得 $a+0=a$ 对集合 A 中的所有元素 a 成立.

(vii)在集合 A 中存在元素 1，使得 $a\cdot 1=a$ 对集合 A 中的所有元素 a 成立.

(viii)对于集合 A 中的任意元素 a，都存在元素 $-a$ 也属于 A，满足 $a+(-a)=0$.

(ix)对于集合 A 中的任意元素 $a\neq 0$，都存在元素 a^{-1} 也属于 A，满足 $a\cdot a^{-1}=1$.

例 1.1 对于下表所定义的加法和乘法运算，说明系统($\{0, 1\}$, +, ·)构成一个域.

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

解 这是一个二元域. 要证明它满足定义 1.2，只要选取集合中的元素 a，b，c，并判断它们是否满足性质(i)至(v). 对于二元域，只有 $2^3=8$ 种可能的组合. 通过简单的验证可以看到，所有 8 种组合都满足这些性质. 接下来，我们要找元素 0 和 1(在本例中，它们分别是 0 和 1)，它们应该满足性质(vi)和(vii). 0 的加法逆元是 0，1 的加法逆元是 1，满足性质(viii). 1 的乘法逆元是 1，因为 $1\cdot 1=1$. 因此，以上的加法和乘法表使得系统($\{0, 1\}$, $+$, $\cdot$)构成一个域.

■

例 1.2 给出一个加法表和一个乘法表，使($\{0, 1, 2\}$, $+$, $\cdot$)构成一个域.

解

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

■ 8

本书使用的大多数域都是实数系和复数系.

1.3 能量信号与功率信号

电阻消耗电能，并将其转化为热能. 在美国大学二年级的电路实验中，有一个实验就证明了这一事实. 在这个实验中，学生将一根蜡烛斜靠在一个发热的电阻上，在电阻两端加上适当的稳定电压以加热电阻. 假如消耗的能量、蜡烛的大小和电阻的额定功率是合适的，那么，蜡烛的熔化程度将正比于消耗掉的电能. 这个实验证明，不仅电能被消耗变成热能，而且，能量的消耗贯穿整个时间过程. 假如电压不太高，电阻被加热到一个恒定的温度后就会维持该温度而不再变化. 换句话说，就是电阻的温度达到了一个稳定状态. 此时电阻消耗掉的是平均功率(average power). 其含义如下.

1. 产生的热量正比于平均功率. 注意，这里强调的是平均功率而不是瞬时功率.

2. 稳定状态是一个稳态信号. 在理想情况下，稳态信号无限长，它在世界开始之前就存在，一直持续到世界灭亡也不终止. 然而，实验信号的持续时间不可能是无限长的，因此，将无限时间理想化只是为了数学上的方便而已.

设连续时间信号 $v(t)$是加在电阻两端的电压，则平均功率定义为

$$P=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{v^2(t)}{R}\mathrm{d}t \tag{1-1}$$

为了使平均功率只与信号有关，令电阻值为1欧姆. 则总功率、平均功率或信号的均方值定义为

$$P=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}v^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-2}$$

9

P 的平方根是均方根(rms). 注意，也可以用通过电阻的电流来定义这些功率. 定义中的信号可以是电压、电流或其他非电信号，如压力、速度等任何信号.

由平均功率的定义可以引入信号的分类. 按平均功率的不同，信号被分成两类，即能量信号和功率信号. 假如式(1-2)是有限的(即 $0<P<\infty$)，称信号 $v(t)$是功率信号(power signal). 假如信号的能量是有限的，称信号 $v(t)$是能量信号(energy signal)，其中能量 E 定义为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}v^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

它表示的是信号的总能量而不是瞬时能量. 我们所关心的信号要么是能量信号，要么是功率信号. 然而，应该清楚，除了这两类信号，还有其他信号. 斜坡信号或单调增加的指数信号具有无穷大的功率，因此，它们既不是功率信号也不是能量信号，我们的讨论不包含这类信号. 因此，本书所讨论的信号或者是能量信号，或者是功率信号. 值得注意的是，任何有限持续时间信号都是能量信号. 而无限持续时间信号可能是功率信号，也可能是能量信号，依赖于式(1-2)和式(1-3)的值.

为什么我们要关心一个信号是能量信号还是功率信号呢? 原因是能量信号和功率信号的卷积、自相关函数和傅里叶变换具有不同的形式.

例 1.3 图 1-9 所示的方波脉冲具有零功率. 为了说明这一点，我们逐步增大式(1-2)中的 a，可以看到

当 $a=5$ 时， $P=\frac{1}{10}\int_0^1 2^2\mathrm{d}t=\frac{4}{10}$

当 $a=10$ 时， $P=\frac{1}{20}\int_0^1 2^2\mathrm{d}t=\frac{4}{20}$

10

当 $a=100$ 时， $P=\frac{1}{200}\int_0^1 2^2\mathrm{d}t=\frac{4}{200}$

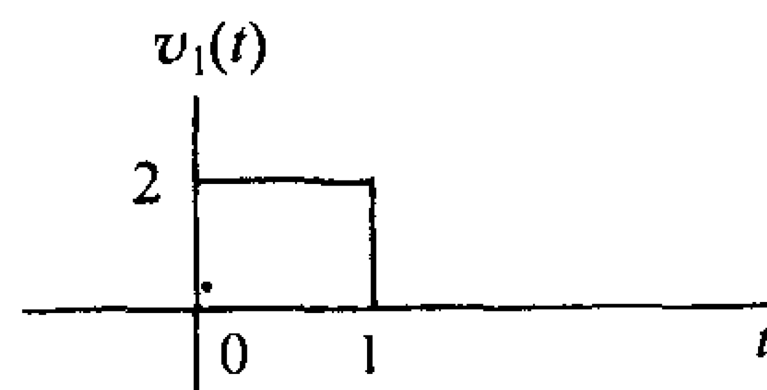


图 1-9 方脉冲

随着 a 增大，功率变得越来越小，最终趋向于极限 0．然而，由式(1-3)知，该方脉冲的能量是有限的

$$E=\int_{0}^{1}2^{2}\,\mathrm{d}t=4$$

因为信号的功率为零，能量有限，因此它是一个能量信号． ■

例 1.4 图 1-10 所示的周期方波是功率有限、能量无限信号．同上例一样，通过逐步增大式(1-2)中的 a 的值，有

当 $a=5$ 时，$P=\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_{-5}^{5}v_2^2(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{20}{10}$

当 $a=10$ 时，$P=\dfrac{1}{20}\displaystyle\int_{-10}^{10}v_2^2(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{40}{20}$

当 $a=100$ 时，$P=\dfrac{1}{200}\displaystyle\int_{-100}^{100}v_2^2(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{400}{200}$

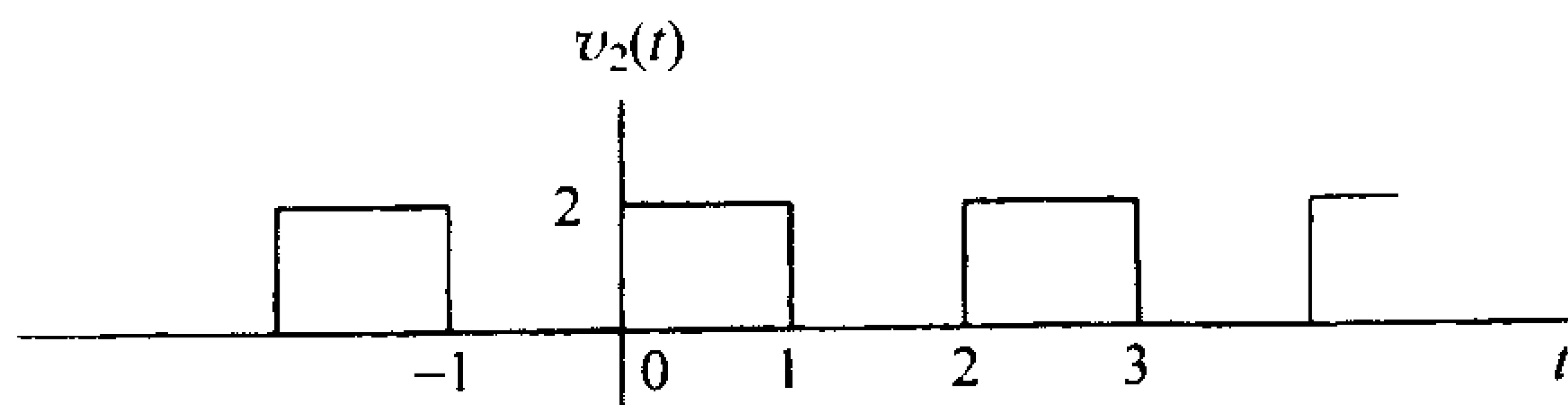


图 1-10 具有有限功率和无限能量的周期方波

我们看到，随着 a 逐渐增大，得到的功率都是 2．注意，对于周期为 T 的周期信号，其功率可以简化为

$$P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}v^{2}(t)\,\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

学过电路分析的读者对此应该是熟悉的．均方根值是功率的平方根，因此，在本例中，信号的均方根是$\sqrt{2}$．而信号的能量是无限的，因为

11

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}v_2^2(t)\,\mathrm{d}t=\infty$$

因为能量无限而功率有限，因此这是一个功率信号． ■

实际产生和使用的信号一定具有有限持续时间，因此是能量信号．上面的分类只是为了与信号的数学模型相适应．以后我们还会经常说一个信号具有无限持续时间，虽然这样的信号在实际中不存在．然而，一个具有无限持续时间的信号并不意味着就是一个功率信号．请看下例．

例 1.5 图 1-11 所示的指数衰减信号具有无限持续时间，但是具有有限能量.

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} v_3^2(t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\infty} 4\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=4$$

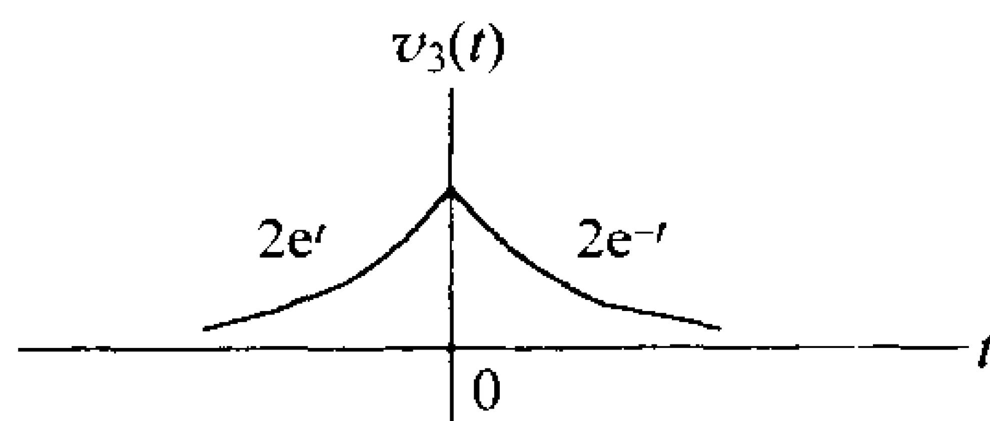


图 1-11 具有有限能量的衰减指数信号

由下面的积分序列，我们可以看到该信号的功率为 0.

当 $a=5$ 时， $P=\frac{1}{10}\int_{-5}^{5} v_3^2(t)\mathrm{d}t=0.4$

当 $a=10$ 时， $P=\frac{1}{20}\int_{-10}^{10} v_3^2(t)\mathrm{d}t=0.2$

当 $a=100$ 时， $P=\frac{1}{200}\int_{-100}^{100} v_3^2(t)\mathrm{d}t=0.04$

P 的极限为 0. 因为信号的功率为零而能量是有限的，因此是能量信号. ■

练习 1.1 求 $v(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$的功率和能量.

答案：$P=0$，$E=1/4$.

[12]

对于离散时间信号，功率和能量的定义变为

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} v^2(n) \tag{1-5}$$

和

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty} v^2(n) \tag{1-6}$$

式(1-5)中的和式在区间($-N$，N)内共有 $2N+1$ 项，因此，要将和除以项数来求平均值，又称均方值(mean-square value). 虽然对离散时间信号而言，功率的概念没有意义，但是，我们仍然把均方值看作平均功率. 式(1-6)中的能量是总能量 (total energy)，而不是瞬时能量.

例 1.6 图 1-12 所示的信号是能量信号．为了证明这一点，我们逐步增加式(1-5)中的 N，可以看到

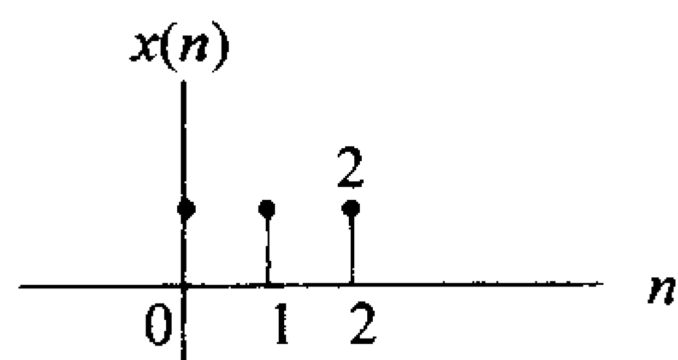


图 1-12 能量信号

当 $N=5$ 时，$P=\frac{1}{11}\sum_{n=-5}^{5}x^2(n)=\frac{12}{11}$

当 $N=10$ 时，$P=\frac{1}{21}\sum_{n=-10}^{10}x^2(n)=\frac{12}{21}$

当 $N=100$ 时，$P=\frac{1}{201}\sum_{n=-100}^{100}x^2(n)=\frac{12}{201}$

随着 N 的增大，功率变得越来越小，最终趋向于极限 0．然而，由式(1-6)可知，脉冲的能量是有限的：

$$E=\sum_{n=0}^{2}2^2=12$$

因为信号的功率为零而能量有限，因此是能量信号． ■

例 1.7 图 1-13 所示的周期数字方波具有有限功率和无限能量．同上例一样，通过逐步增大式(1-5)中 N 的值，有

13

当 $N=5$ 时，$P=\frac{1}{11}\sum_{n=-5}^{5}x^2(n)=\frac{20}{11}$

当 $N=10$ 时，$P=\frac{1}{21}\sum_{n=-10}^{10}x^2(n)=\frac{40}{21}$

当 $N=100$ 时，$P=\frac{1}{201}\sum_{n=-100}^{100}x^2(n)=\frac{400}{201}$

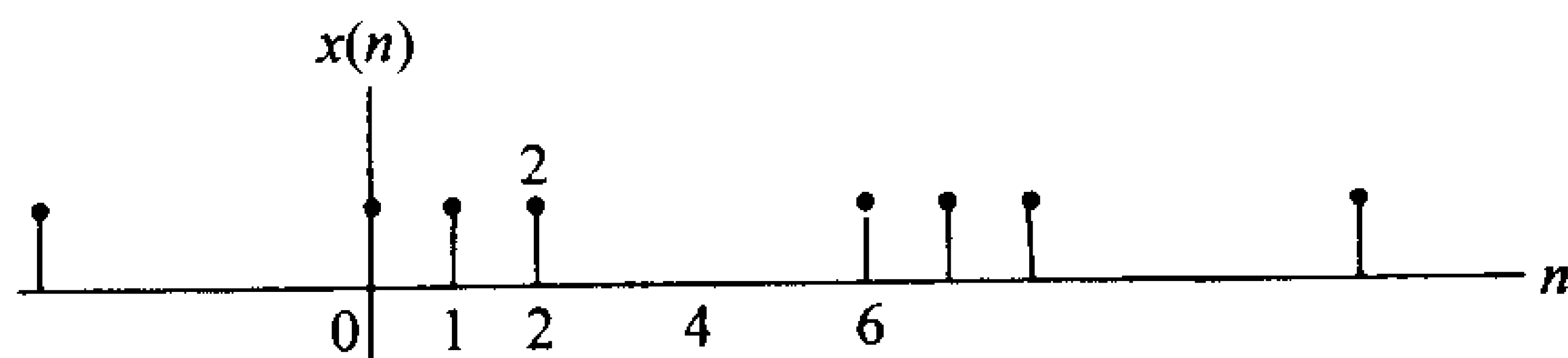


图 1-13 具有有限功率和无限能量的周期数字信号

随着 N 越来越大，P 越来越靠近 2．注意，对于一个周期为 N 的周期信号而言，其功率也可以通过求其在一个周期内的平均值来计算．

$$P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^2(n) \tag{1-7}$$

均方根值就是功率的平方根．信号的能量为

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2(n)=\infty$$

因为信号的能量无限而功率有限，因此是功率信号. ■

如同连续时间信号一样，一个具有无限持续时间的信号不一定就是功率信号. 请看下面的例子.

14

例 1.8 图 1-14 所示的指数信号在正反两个方向都有无限持续时间，但是，它是能量信号. 信号的能量为

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2(n)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^2(n)+x^2(0)$$

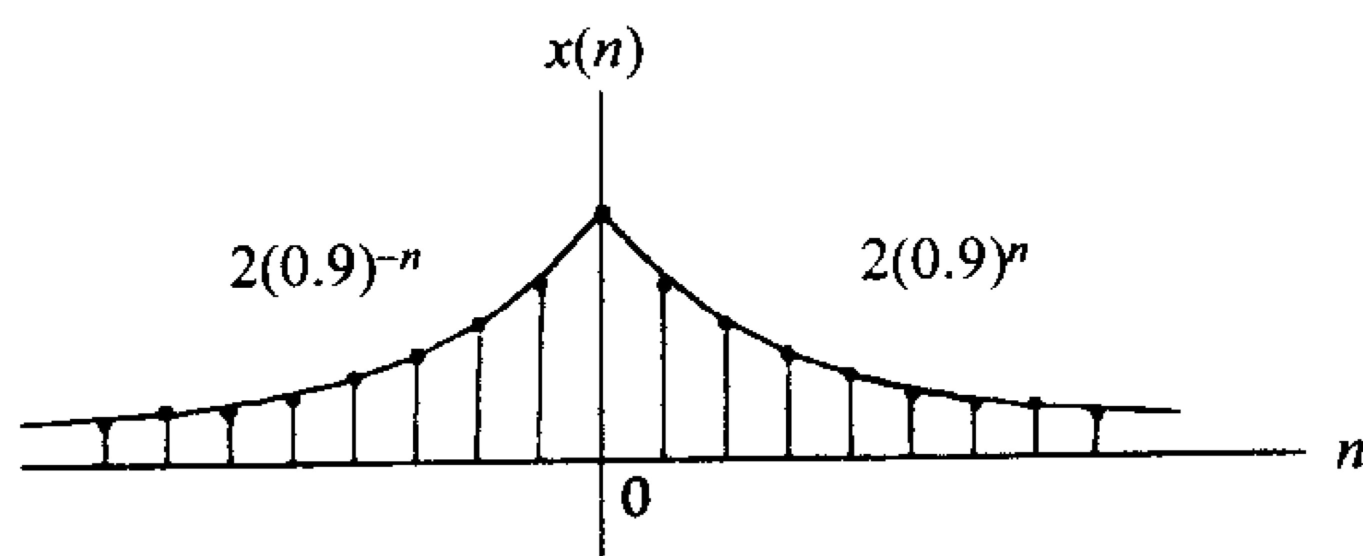


图 1-14 指数能量信号

式中右端项的推导基于如下的事实：对于图 1-14 所示的波形，从第 $-\infty$ 项到第 -1 项之和等于从第 1 项到第 ∞ 项之和. 因此，信号的能量可以由从第 1 项到第 ∞ 项之和的 2 倍再加上 $n=0$ 项的和给出. 和式 $\sum_{n=0}^{\infty}(0.81)^n$ 是一个几何级数，其值为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}\qquad |a|<1 \tag{1-8}$$

由于能量表达式中和式的下限是 1 而不是 0，因此，需要先用式(1-8)计算出第 0 项到第 ∞ 项之和，再减去 $n=0$ 项. 令 $a=0.81$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^2(n)=4\sum_{n=0}^{\infty}(0.81)^n-4=\frac{4(0.81)}{1-0.81}=17.052\,6$$

15

因此，能量是该值的 2 倍再加上 $x^2(0)$

$$E=2(17.052\,6)+4=38.105\,3$$

由下面的求和序列，易知信号的功率为 0.

当 $N=5$ 时， $P=\frac{1}{11}\sum_{n=-5}^{5}x^2(n)=2.383$

当 $N=10$ 时， $P=\frac{1}{21}\sum_{n=-10}^{10}x^2(n)=0.547\,1$

当 $N=100$ 时， $P=\frac{1}{201}\sum_{n=-100}^{100}x^2(n)=0.055\,2$

P 的极限为 0. 因为信号的功率为零，能量大于零但有限，因此是能量信号. ■

在以后的讨论中，我们将只考虑能量信号和功率信号. 需要再一次提醒的是，功率信号一定具有无限持续时间，因此，这里的定义只适用于它们的数学模型.

练习 1.2 求 $v(n)=(0.9)^n u(n)$的功率和能量.

答案：$P=0$，$E=5.2632$.

1.4 确定性信号与随机信号

关于随机信号，在不同的文献中有不同的定义，这也意味着目前随机信号还没有一个统一的好定义. *随机*(random)意味着不可预知，因此随机信号就是取值不可预知的信号. 同确定性信号一样，小波和傅里叶变换同样适合于随机信号. 现在，让我们回顾一下历史，以便更好地理解随机噪声.

苏格兰植物学家罗伯特·布朗(1773—1858)是他生活的那个时代最著名的科学家之一. 他曾与年轻的达尔文(1809—1882)会面，给他若干忠告——当时，达尔文尚未乘坐“贝格尔”号开始他始于 1831 年的著名航海之旅. 布朗自己也曾作为一名博物学家进行过航海旅行. 他于 1801 年到达过至今仍然是人迹罕至的澳洲大陆. 他的船于 1805 年返回，带回了大约 4000 个植物物种. [16]

布朗被人们记住主要是由于两大发现. 其一，他把细胞内部的细小生物体作为一个有规律的特征，并于 1831 年把它命名为*细胞核*(nucleus)，该词源于拉丁文“细小的核”. 自此以后，细胞核得到了人们广泛的认识. 他的另一个发现则在生命科学领域之外产生了重大的影响. 1827 年，他在显微镜下观测悬浮在水中的小麦花粉时，发现微粒正在按照某种无规则的方式运动. 他研究了悬浮在水中的其他微粒，甚至研究了来自于斯芬克斯雕像的微粒，发现它们具有相同的随机运动. 从此，人们把这种运动称为*布朗运动*(Brownian motion). 布朗相信他发现了生命的一种基本形式，这种基本形式存在于有生命和无生命的物体中. 在他的有生之年，这一结论一直无人证伪.

耸立在维也纳中央公墓的路德维格·玻尔兹曼的墓碑上刻有陵墓主人的名字 Ludwig Boltzmann，生卒年 1844—1906，碑文 $S=k\log W$. 其中，S 表示熵，k 是现在所称的玻尔兹曼常数，而 W 是自然界可能状态的某种测度. 这是自然科学中最著名的公式之一，它给出了存在于物质原子级中混沌状态的量度，并且适用于任何带有随机参数的系统. 早在对物质的本原还存在着相当大的争论的年代，玻尔兹曼就是一个原子学说的支持者. 他的工作影响了爱因斯坦关于布朗运动的研究.

1905 年，阿尔伯特·爱因斯坦(1879—1955)在德国杂志《Annalen der Physick》(物理年刊)上发表了 5 篇论文，内容涉及 3 个重要的进展. 其中的相对论是如此令人吃惊且与人们的一般经验格格不入，这使得我们常常忽视了他在另外两个方面取得的成就. 其中的一篇论文涉及光电子效应，而另一篇论文给出了布朗运动的数学分析. 爱因斯坦指出，根据玻尔兹曼的动力学理论，假如其中悬浮有微粒的水由处于随机运动的分子组成，那么，我们观测到的结果就是这些悬浮的微粒的布朗运动. 爱因斯坦进一步指出，任何处于热平衡状态的系统都将呈现这种布朗运动，并且他还正确地导出了由于电子的随机运动而在电路中产生的电流. 由于电路的基本元素，例如电阻，是一个处于热平衡状态的系统，因此，随机噪声将作为加在它两端的电压而出现. 爱因斯坦给出了计算这个电压值的公式：

$$V = 4kTR \times \mathrm{Bw}$$

其中，V 是均方根电压，k 为玻尔兹曼常数，T 是开氏温度，R 是电阻值(单位是欧姆)，Bw 是测量设备的带宽. 例如，一个在室温下 1 kΩ 的电阻，用一个普通伏特计测量，通过它两端的均方根电压值为 3～6 μV. 图 1-15 所示的波形是用示波器观测到的这个电压值的典型图像.

17

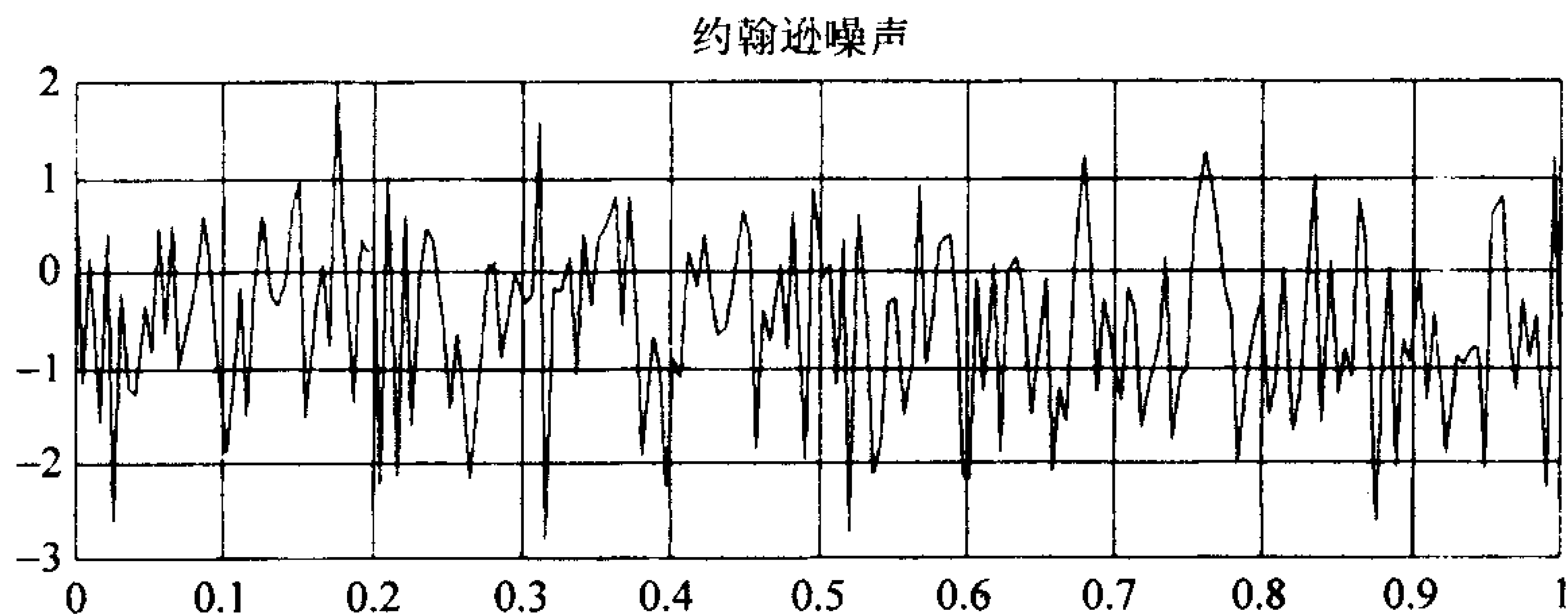


图 1-15 典型的约翰逊噪声

1928 年贝尔实验室的科学家第一次检测到一种噪声，并从那时起称它为约翰逊噪声. 这种噪声限制了通信系统的正常运行. 一个远距离发射器发送的信号是十分微弱的，甚至可能被这种噪声所湮没. 克服这个缺陷的一个方法是降低接收器前端的温度. 因此，有些敏感的接收器在低温环境中运行，而处在放大器前几个环节的部件则要在接近于绝对零度的温度下工作.

1.5 傅里叶变换与哈尔变换

信号可以被分为以下 4 类：

1. 连续时间能量信号.
2. 连续时间功率信号.

3. 离散时间能量信号.

4. 离散时间功率信号.

每一类信号具有不同的傅里叶变换形式，分别为：

1. 连续时间傅里叶变换(CTFT).

2. 连续时间傅里叶级数(CTFS).

3. 离散时间傅里叶变换(DTFT).

4. 离散时间傅里叶级数(DTFS).

18

信号类型与傅里叶变换形式的对应关系为：

1. 连续时间能量信号↔CTFT.

2. 连续时间功率信号↔CTFS.

3. 离散时间能量信号↔DTFT.

4. 离散时间功率信号↔DTFS.

快速傅里叶变换是 DTFS 的一种快速算法，它不适用于其他形式的变换. DTFS 的定义如下：

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j2\pi nk/N} \tag{1-9}$$

本书将重点讨论这种形式的傅里叶变换.

需要注意的是，式(1-9)实际上包含 N 个方程，每一个方程对应一个 k 值.

$$V(0) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{0} = \sum_{n=0}^{N-1} v(n)$$

$$V(1) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j2\pi n/N}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$V(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j2\pi n(N-1)/N}$$

每个方程对应一个不同的指数项，从 e^{0}，$e^{-j2\pi n/N}$ 开始，直到 $e^{-j2\pi n(N-1)/N}$ 为止. 这些指数项是信号展开的基函数(基函数的概念将在第 3 章详细讨论). 换句话说，DTFS 是 $v(n)$ 按照这些指数项的一种展开. 通常把指数项写成标准形式. 令

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{1-10}$$

那么

19

$$W_N^0 = e^{0}$$

$$W_N^1 = e^{-j2\pi/N}$$

$$W_N^2 = e^{-j2\pi 2/N}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$W_N^{N-1} = e^{-j2\pi(N-1)/N}$$

这 N 个方程可以写成矩阵形式．例如，当 $N=4$ 时，有

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ V(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

使用这些新的记号，式(1-9)可表示为

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) W_N^n \tag{1-12}$$

例 1.9 求 $v(n)=\{1, 2, 3, 4\}$的 DTFS.

解 由于 $N=4$，所以可以直接使用式(1-11)．将 $v(n)$与式(1-11)中的矩阵相乘，有

20

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ V(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2+j2 \\ -2 \\ -2-j2 \end{bmatrix}$$

■

哈尔变换

哈尔变换是一种能够用公式计算的小波变换．它包含 2 个式子，分别为

$$c_{00} = \int_0^1 v(t)\varphi_{00}(t)\,dt \tag{1-13a}$$

$$d_{kj} = \int_0^1 v(t)\psi_{kj}(t)\,dt \tag{1-13b}$$

其中，基函数 φ_{00} 和 ψ_{kj} 示于图 1-16 中．函数 $\varphi_{00}(t)$被称为尺度函数(scaling function)，$\psi_{kj}(t)$被称为小波(wavelet)．

图 1-16 给出了第 0，1，2 层哈尔基函数，层数还可以继续增加．第 0 层包含函数 $\varphi_{00}(t)$(尺度函数)和 $\psi_{00}(t)$(母小波(mother wavelet))．第 1 层包含 2 个函

数 $\psi_{10}(t)$和 $\psi_{11}(t)$. 第 2 层包含 4 个函数 $\psi_{20}(t)$, $\psi_{21}(t)$, $\psi_{22}(t)$和 $\psi_{23}(t)$. 每增加一层，小波个数增加一倍. 因此，第 3 层包含 8 个小波，每个小波的长度是第 2 层小波长度的一半，幅度也适当伸缩使得每个小波具有单位能量. 计算哈尔变换就是根据式(1-13)用基函数去展开时间函数.

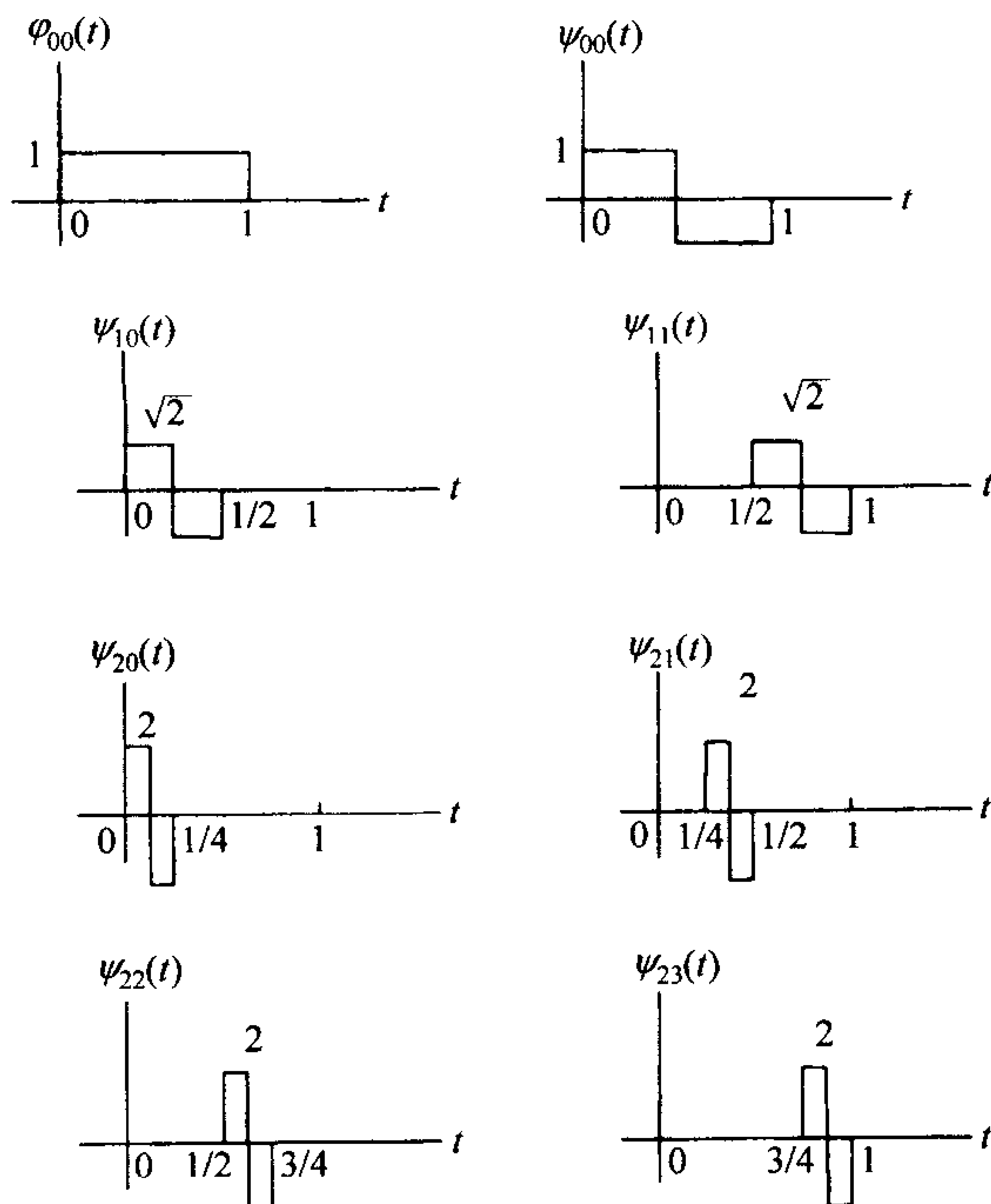


图 1-16 第 0 层至第 2 层哈尔基函数

例 1.10 计算图 1-17 所示信号的哈尔变换.

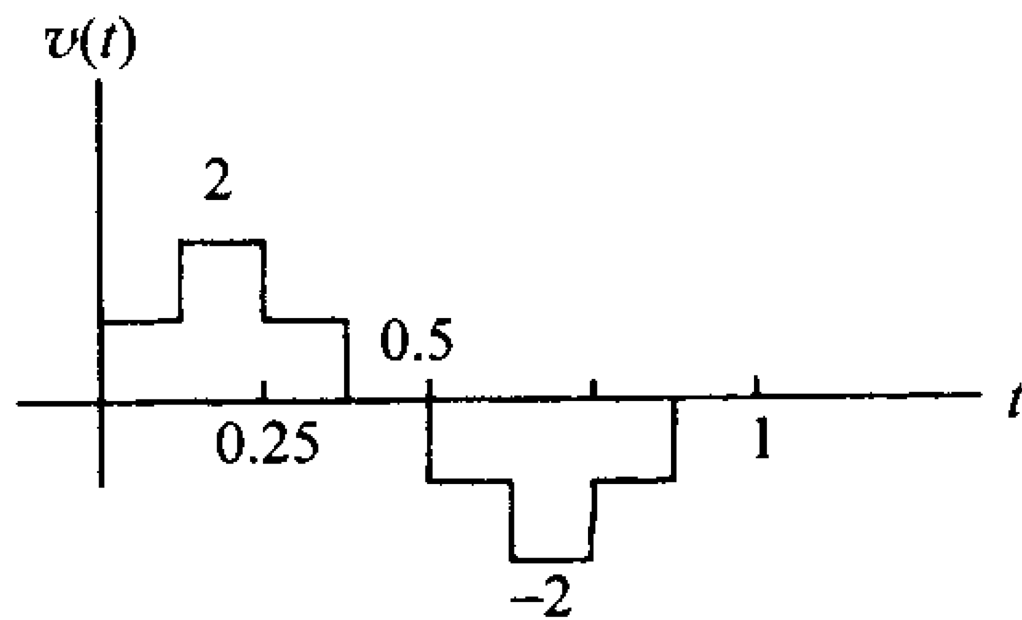


图 1-17 函数 $v(t)$

解 将 $v(t)$代入式(1-13)，得

$$c_{00} = \int_0^1 v(t)\varphi_{00}(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$d_{00} = \int_0^1 v(t)\psi_{00}(t)\mathrm{d}t = 1$$

21
~
22

$$d_{10} = \int_{0}^{0.5} v(t)\psi_{10}(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$d_{11} = \int_{0.5}^{1} v(t)\psi_{11}(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$d_{20} = \int_{0}^{0.25} v(t)\psi_{20}(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$$

$$d_{21} = \int_{0.25}^{0.5} v(t)\psi_{21}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$$

$$d_{22} = \int_{0.5}^{0.75} v(t)\psi_{22}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$$

$$d_{23} = \int_{0.75}^{1} v(t)\psi_{23}(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$$

因此，哈尔变换的前 8 项为$\left\{0,\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right\}$. ■

式(8-12)给出了小波逆变换公式. 将其应用于图 1-17 所示的函数，有

$$v(t) = c_{00}\varphi_{00}(t) + d_{00}\psi_{00}(t) + d_{10}\psi_{10}(t) + \cdots + d_{23}\psi_{23}(t)$$

例 1.11 由哈尔逆变换求图 1-17 所示函数 $v(t)$.

解 用图 1-16 所示的函数乘以系数，$c_{00}=0$，$d_{00}=1$，…，$d_{23}=-1/4$，结果如图 1-18 所示. 将这些函数相加就得到图 1-17 所示的函数 $v(t)$.（请读者自行验证.）

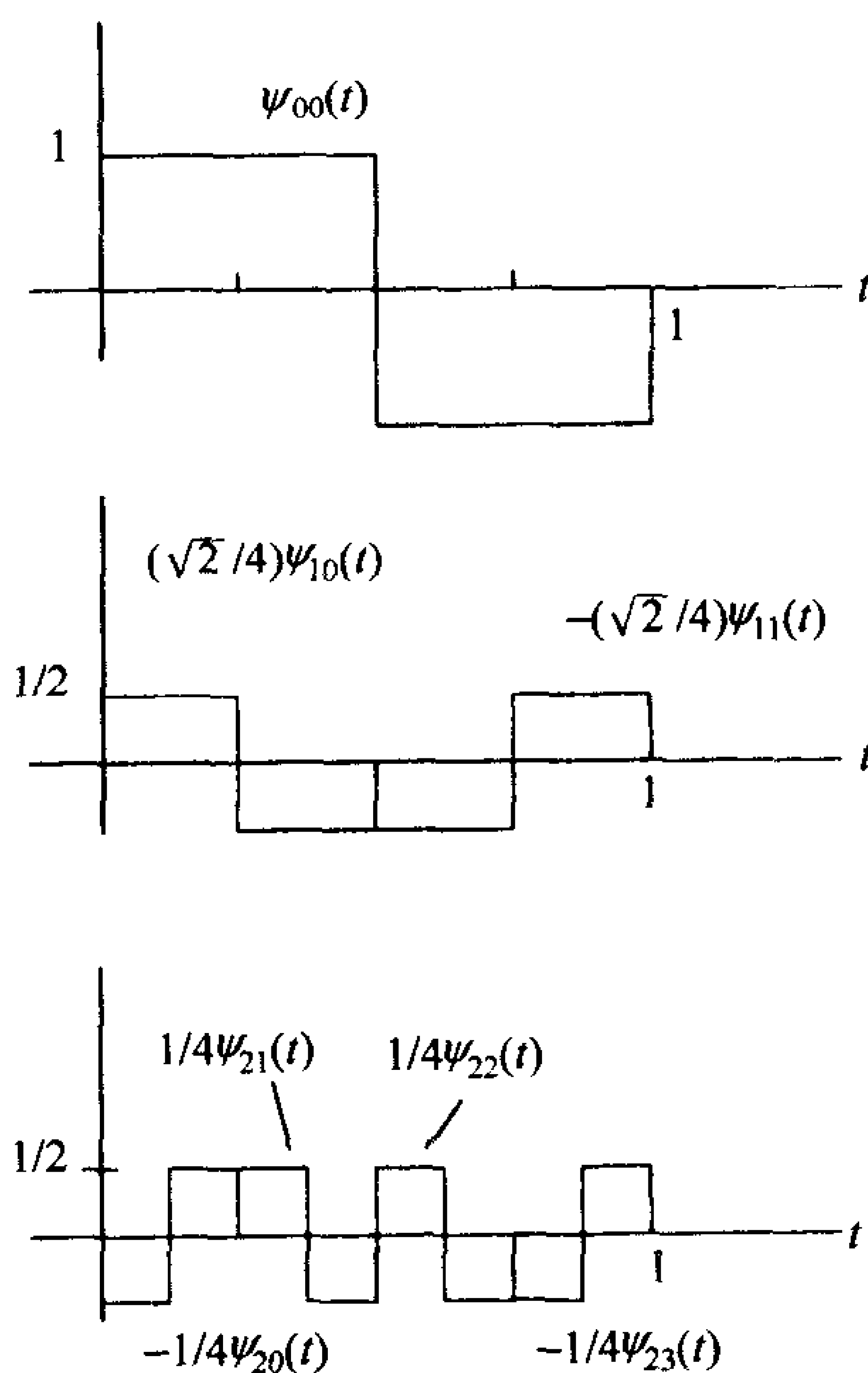


图 1-18 将图中函数相加得到 $v(t)$

■

从上面这些例子可以看出，傅里叶变换与小波变换存在许多相似性. 两种变换都是将时间函数按基函数作展开. 在傅里叶变换中，基函数是指数函数，而在哈尔变换中，基函数是方波脉冲. 它们的系数都是通过求内积运算(即求 $v(t)$ 与基函数的乘积的积分)得到的.

然而，两种变换的区别是存在的，尽管在这些简单的例子中不够明显. 除哈尔函数外，还有许多小波基函数，每一组基函数对应一种小波变换. 傅里叶变换也存在 4 种不同的形式，它们的不同之处在于小波基函数的数目有许许多多. 另一个重要的区别在于计算小波系数的方法. 注意，上面的例子都使用了内积公式，其中的基函数必须是已知的. 然而，利用多采样率理论，大多数小波系数都可以用另外的方式来计算. 按这种计算方式，我们只需要知道滤波器系数，而不需要使用基函数. 本书将重点介绍这种计算方式.

23 ~ 24

第2章 向　量

如果问一个工程师什么是向量，得到的答案也许是“一个有方向的量”．几何向量是带方向的量，但是除此之外还有其他类型的向量，而那些向量并不具有数量和方向．与其他任何事物一样，向量是由一系列性质来定义的．几何向量的重要性质被罗列在下面的定义中．任何事物，只要满足这些性质就被认为是一个向量集．它可以是满足这个定义的许多事物，包括波形．信号的许多重要属性实际上就是向量属性．因此，人们常说信号处理就是几何学．

“向量”这个词的含义远远不止于几何向量．它可以涵盖多种不同的事物，比如波形、矩阵以及数．事实上，用这样一个定理可以清楚地描述它：定义在集合 A 上的、其值域为某个向量空间的所有函数的集合构成一个向量空间．因为实数系 R 是一个向量空间，那么，将集合 A 映射到 R 的所有映射构成的集合就是一个向量空间．这意味着信号构成一个向量空间，许多其他集合也是向量空间．例如，一个随机变量是一个函数，它的定义域是样本空间(所有可能的试验结果的集合)，值域是 R．因此，定义在样本空间上的所有随机变量的集合是一个向量空间．这也解释了在均方估计中“正交原理”一词的合理性，因为随机变量是向量，所以可以对它们进行几何描述和分析．

没有附加性质的向量空间实际上是没有用处的．内积的引入使得我们可以在向量空间中进行几何运算和分析，而相关的运算和分析在信号处理中是经常遇到的．由内积可以诱导出范数，进一步又可以诱导出距离测度．这些都是数字信号处理中所必需的运算．微积分的引入使得我们能够处理模拟信号．**巴拿赫空间**(Banach space)是一个包含所有极限点的集合，在这个空间里，微积分运算是有意义的．将内积空间与巴拿赫空间结合，就可以同时让微积分运算和几何运算都有意义．这两个空间的结合被称为**希尔伯特空间**(Hilbert space)，这个空间是模拟信号处理所必需的．

冯·诺依曼(1903—1957)提出了一些新的概念，他不仅引入了希尔伯特空间，发展了元胞自动机和博弈论，还发明了在数字计算机中存储程序的概念．这些理论和概念在今天已经广为人知．他引入的希尔伯特空间为数学家和自然科学家开辟了新的研究领域，博弈论成为经济学家的常用工具，机器人已不是什么新鲜事物，而存储程序的思想使得个人计算机成为可能．有人说在过去的100年中，冯·诺依曼对科学的影响超过了所有人，因为他让信息时代的到来成为可能．

本章目标　**读完本章以后，读者应该掌握：**

- 定义向量空间，包括它的所有性质.
- 定义度量空间、范数和内积.
- 求一个给定的内积诱导的范数和度量.
- 如式(2-26)～式(2-29)，写出 4 类信号的通常的内积，并由此推导出每一类信号通常的范数和度量.

2.1　向量空间

大多数人以瞎子摸象的方式来看待向量. 第一个瞎子说大象像蛇，因为他摸到的是大象的尾巴；第二个瞎子说大象像树，因为他摸到的是大象的腿；第三个瞎子说大象像一个谷仓，因为他摸到的是大象的半边身体. 大多数人就是以这种管中窥豹的方式来看待向量的(即把向量看成一个带有方向的量). 他们从来没有想过以另外的观点去理解它.

一个人一旦开始按照某种思维来看待一个事物，要改变他(她)是几乎不可能的. 然而，我们仍然必须改变对向量的固有认识，以便在信号处理中从向量的概念中得到某些益处. 下面这个难题将证明要改变一个人的看法是何其艰难.

难题：图 2-1 是一个物体的顶部和前部视图，画出它的侧视图.

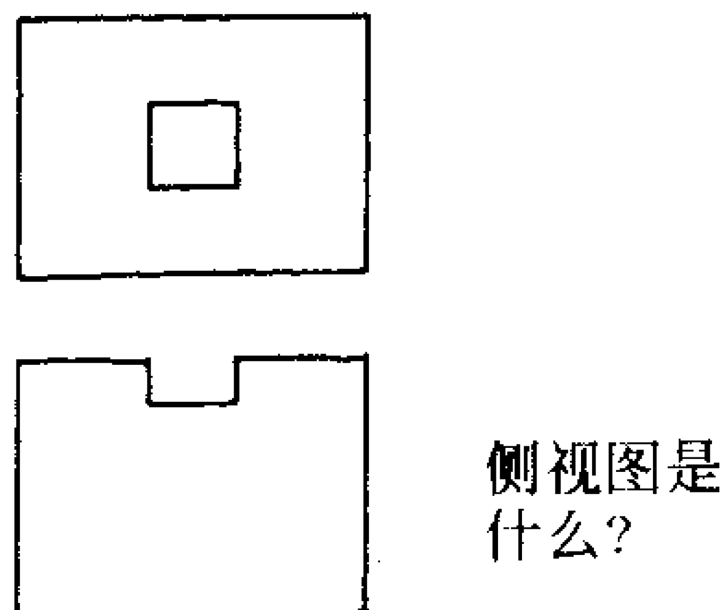


图 2-1　此题要求画出物体的侧视图

26

图中没有漏掉任何线条，也不是某些虚线画成了实线，这个难题当然是可能解决的. 你是否能在本章结束之前，在不偷看答案的前提下解决这个问题呢?

你也许不会有困难，因为你已被告知为了解决这个难题你必须改变思维，改变对于向量的常规认识. 如果你的思维属于常规类型，解答本题是不容易的. 向量的概念包含了比几何向量(带箭头的线段)丰富得多的内涵，这似乎是一个特别难于理解的概念.

向量的定义是针对一个集合而不是一个元素的. 集合中的所有元素都要满足一系列性质. 不同的文献给出的定义有所不同，但却是等价的. 这些定义的不同之处在于它们在表示定义的性质时所采取的方式不一样. 下面的定义清楚地表达了向量所包含的 2 个运算和 7 个性质.

定义 2.1　一个向量空间是一个集合 $V=\{v_i\}$ 加上一个数域 $A=\{a_i\}$，在该集

合上定义了如下的两种运算并满足以下 7 条性质.

1. 两个向量可以相加得到第三个向量. 这个运算使我们可以由两个向量来产生一个新的向量.

2. 一个数可以与一个向量相乘得到另一个向量. 这个运算使我们可以由一个数和一个向量来产生一个新的向量.

对于这两种运算，向量的加法以及向量和数的乘法，如下的性质对于所有 $v_i \in V$ 和 $a_i \in A$ 成立：

(1) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

(2) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.

(3) $a_1(v_1 + v_2) = a_1 v_1 + a_1 v_2$.

(4) $(a_1 + a_2)v_i = a_1 v_i + a_2 v_i$.

(5) $(a_1 a_2)v_i = a_1(a_2 v_i)$.

(6) $1 \cdot v_i = v_i$.

(7) 存在唯一的向量 v_0，称为零向量，对所有向量 v_i，满足 $0 \cdot v_i = v_0$.

回顾域的概念，域是模仿具有加法和乘法两种运算的实数系来定义的. 在本书中，我们既使用实数域，也使用复数域. 所以，当提及标量(scalar)时，可以是实数，也可以是复数. (因为实数是复数的特殊情况，所以，我们可以把所有的标量都看成是复数.)

27

以上性质定义了一个向量空间. 注意，这个定义不适用于单个向量，只适用于向量集. 一个向量空间是一个在其上定义了两个函数的集合，这两个函数分别是映射 $V \times V \rightarrow V$ 和映射 $A \times V \rightarrow V$. 前者定义了向量加法，后者定义了标量乘法(符号 $V \times V$ 和 $A \times V$ 表示集合的叉积). 任何具有这两个函数的对象的集合，只要满足以上的 7 个性质，就是一个向量空间. 而且，这些向量与几何向量具有同样的合理性，即使它们可能没有数值和方向.

通常的几何向量满足这些性质，因此构成一个向量空间. 为了说明这一点，令 v_1，v_2，…是一个通常的几何向量的集合. 它们是我们所熟知的几何意义上的带有方向的量. 令 a_1，a_2，…是一般的数(实数系中的数). 在这里，这些数被称为标量，但是它们确实是一般意义下的数. 两个向量相加时，它们的位置可以交换(满足性质 1). 三个向量相加时，可以先求 $v_1 + v_2$，再将结果与 v_3 相加，或者先求 $v_2 + v_3$，再与 v_1 相加，两种方法的结果是一致的(满足性质 2). 采用类似的方式进行验证，你会看到几何向量满足定义 2.1 中的每一条性质.

然而，并不是只有几何向量满足定义 2.1. 事实上，所有 3×2 的矩阵都满足这些性质. 尽管通常情况下我们不把矩阵叫做向量，但是，具有相同维数的所有矩阵的确构成一个向量空间. 我们习惯于把 $n \times 1$ 的矩阵(列向量)称为向量，因为它们的分量与几何向量的欧几里得分量有着十分紧密的联系，因此，人们通常把它们看成是几何向量而不是矩阵.

实数集满足向量空间的所有性质. 在这里，数扮演着双重角色，它们既是向量又是标量.

我们之所以对向量感兴趣是因为所有能够在实验室产生的波形的集合构成一个向量空间. 将 v_1，v_2，…替换为波形 $v_1(t)$，$v_2(t)$，…，两个波形能够相加产生另一个波形. 标量可以与波形相乘来改变它的幅度. 存在零向量，也就是 $v_0(t)=0$ 对所有时间成立，即满足性质 7.（所有这些描述都等价地适用于离散时间波形集合.）因此，波形(信号)是向量.

到此，你应该改变想法了. 波形是向量，其意义与说一个带方向的量是向量是相同的. 说把一个波形"表示"成一个向量显然是外行话. 没有必要把波形表示成向量，因为波形本身就是向量. 28

例 2.1　考虑所有三角波 $v(t)=at$，$0<t<1$ 的集合. 图 2-2 是这个集合中无穷多个波形中的两个. 下面的哪一个是向量空间？也就是说，在什么情况下我们可以称这些波形为向量？

(a) a 是区间 $-1<a<1$ 内的任意实数.

(b) a 为任意复数.

(c) a 为任意实数.

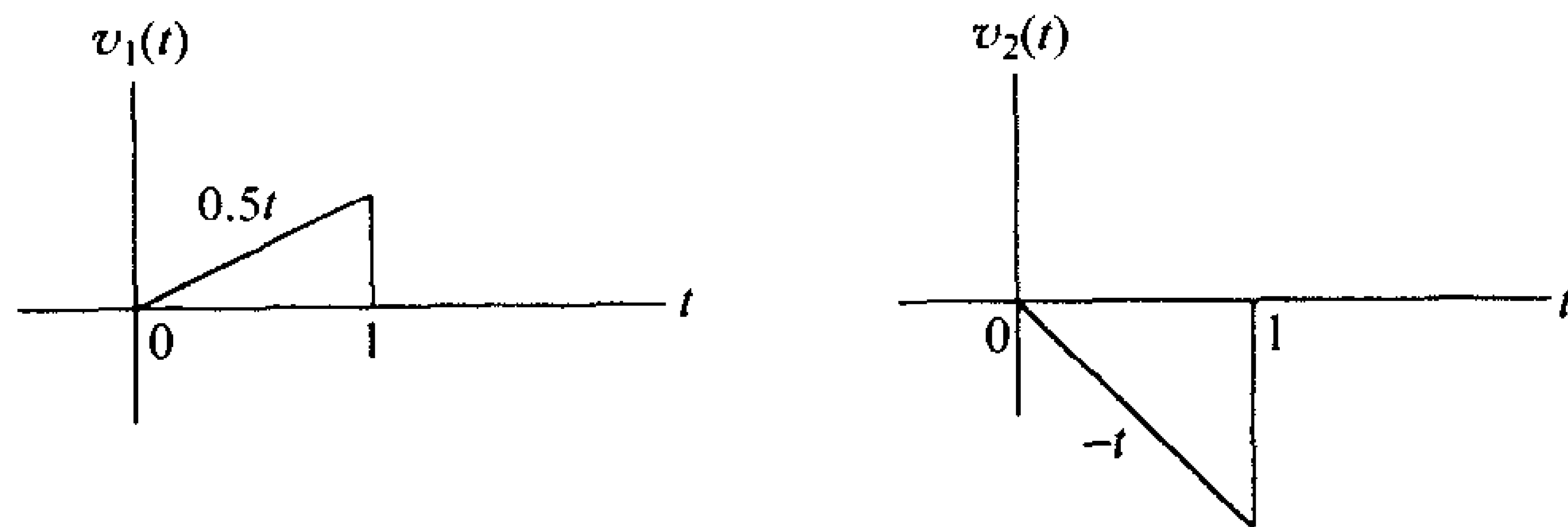


图 2-2　三角波形

解　(a)集合不满足加法运算. 就是说，若

$$v_1(t)=0.4t \quad 而 \quad v_2(t)=0.8t$$

那么 $v_1(t)+v_2(t)=1.2t$ 不属于该集合. 因此，两个波形相加所得到的波形不一定仍然属于该集合. 另外，该集合也不满足向量与标量相乘的性质. 因此，它不构成向量空间.

(b)集合满足定义 2.1 中的向量相加运算和向量与标量相乘的运算，也满足定义中的所有 7 个性质. 零向量是波形 $v(t)=0$，$0<t<1$. 因此，它构成一个向量空间.

(c)集合满足定义 2.1 中的所有性质. 事实上，它是(b)的一个子空间. 一个子空间就是满足向量空间所有性质的一个子集. 注意，(a)中的集合也是(b)的一个子集，但是，它不是子空间. ■ 29

例 2.2 令 X 是所有可能的波形的集合，下面 X 的子集中哪一个是向量空间？

(a)由方波、正弦波、三角波和随机波形构成的子集.

(b)所有方波构成的子集.

解 (a)一个方波与一个正弦波相加得到的波形既不是方波、正弦波和三角波，也不是随机波形，不属于该子集，因此，它不构成向量空间.

(b)这里需要特别注意，假如所有方波的周期和起始时间(相位)相同，那么由这些方波构成的集合“几乎”构成一个向量空间. 问题是如果方波幅度的最大值是确定的，那它不构成向量空间；而假如该集合包含的是任意幅度的方波，它就是一个向量空间. ■

例 2.3 设 X 是所有 3×1 的矩阵构成的集合. 请问下面哪一个子集是向量空间？

(a)所有形如 $x=\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}$ 的矩阵，其中，a，b 为任意实数.

(b)所有形如 $x=\begin{bmatrix}a\\b\\2\end{bmatrix}$ 的矩阵，其中，a，b 为任意实数.

(c)所有满足 $Ax=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 的矩阵 x，其中，A 是 3×3 的矩阵.

30

解 (a)构成向量空间. 两个矩阵相加，有

$$\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3\\b_3\\0\end{bmatrix}$$

其和属于该集合. 另外，矩阵与标量相乘的结果也属于该集合. 定义 2.1 中的所有 7 个性质都满足. 因此，该子集构成一个向量空间.

(b)不构成向量空间. 将子集中的任意元素与 2 相乘，其结果显然不属于该子集，因为乘积是一个 3×1 的矩阵，其最后一个元素是 4 而不是 2.

(c)构成向量空间. 事实上，这个空间被称为是矩阵 A 的零空间. 两个向量相加有

$$Ax_1+Ax_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

其和为零向量，矩阵与标量的乘积也是零向量. 此外，定义 2.1 中的所有 7 个性

质都满足．因此，该子集构成一个向量空间．■

2.2 度量空间

定义 2.1 赋予了向量空间简单的结构，它只定义了向量相加和向量与数相乘这两种运算．但是，怎样度量一个向量的长度，怎样确定两个向量的距离，怎样求两个向量的点积，这些问题在向量空间中都没有涉及．而要对向量进行几何刻画和分析，就必须定义长度、距离和点积．能够进行上述几何分析和描述的向量空间叫做内积(inner product)空间，也称为点积(dot product)空间．一旦定义了点积，长度和距离就自然具有了明确的意义．这就是说，只要定义了向量空间的点积，我们就可以进行几何分析，因为有了点积自然就有了长度和距离的度量．下面，我们先讨论距离．

定义 2.2 一个度量空间(X, d)是一个在其上定义了函数 $d: X\times X\to R$ 的集合 X．该函数将每一对元素 a 和 b 映射到一个数 $d(a, b)\geqslant 0$ 上，并具有如下性质：

31

(i)$d(a, b)=0$ 当且仅当 $a=b$.

(ii)$d(a, b)=d(b, a)$(对称性).

(iii) $d(a, b)\leqslant d(a, c)+d(c, b)$(三角不等式).

数 $d(a, b)$称为 a 与 b 之间的距离，d 被称为度量(metric)或距离函数(distance function).

对一个给定的集合，通常有多种方式度量距离．例如，对于 3×1 的矩阵，常定义它们的距离如下：

$$d_2(x_1,x_2)=d_2\left(\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}\right)=\sqrt{|a_1-a_2|^2+|b_1-b_2|^2+|c_1-c_2|^2} \tag{2-1}$$

然而，这个定义不是唯一的，另一个有效的度量是

$$d_1(x_1,x_2)=|a_1-a_2|+|b_1-b_2|+|c_1-c_2| \tag{2-2}$$

在这里，函数 d_1 满足定义 2.2 的所有 3 个性质．此外，还可以定义距离如下：

$$d_p(x_1,x_2)=[|a_1-a_2|^p+|d_1-d_2|^p+|c_1-c_2|^p]^{1/p} \tag{2-3}$$

其中，p 是整数，$p\geqslant 1$.

例 2.4 对任意非空集合 X，定义

$$d(a,b)=\begin{cases}1 & 若\ b\neq a\\ 0 & 若\ b=a\end{cases}$$

(a)判断它是否为一个度量.

(b)令 $X=R$，求 $a=1$，$b=1.5$，$c=1.5$ 之间的距离.

解 (a)显然，函数 d 满足定义 2.2 的所有 3 条性质，因此，它是一个度量.

32

该度量被称为平庸度量(trivial metric)或离散度量(discrete metric).

(b)$d(a, b)=1$，$d(a, c)=1$，$d(b, c)=0$(注意，$d(a, b)\leqslant d(a, c)+d(b, c)$). ■

例 2.5 我们感兴趣的是波形. 对于定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的所有连续时间波形 $\{v_i(t)\}$ 构成的集合，定义 4 种度量如下：

$$d_\infty(v_1, v_2)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|v_1(t)-v_2(t)| \tag{2-4}$$

$$d_1(v_1, v_2)=\int_a^b |v_1(t)-v_2(t)|\,\mathrm{d}t \tag{2-5}$$

$$d_2(v_1, v_2)=\left[\int_a^b |v_1(t)-v_2(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{1/2} \tag{2-6}$$

$$d_p(v_1, v_2)=\left[\int_a^b |v_1(t)-v_2(t)|^p\,\mathrm{d}t\right]^{1/p} \tag{2-7}$$

试对定义在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的波形，求 $v_1(t)=0.5t$ 与 $v_2(t)=-t$ 之间的每一种距离. 在最后一种情况中，设 $p=3$.

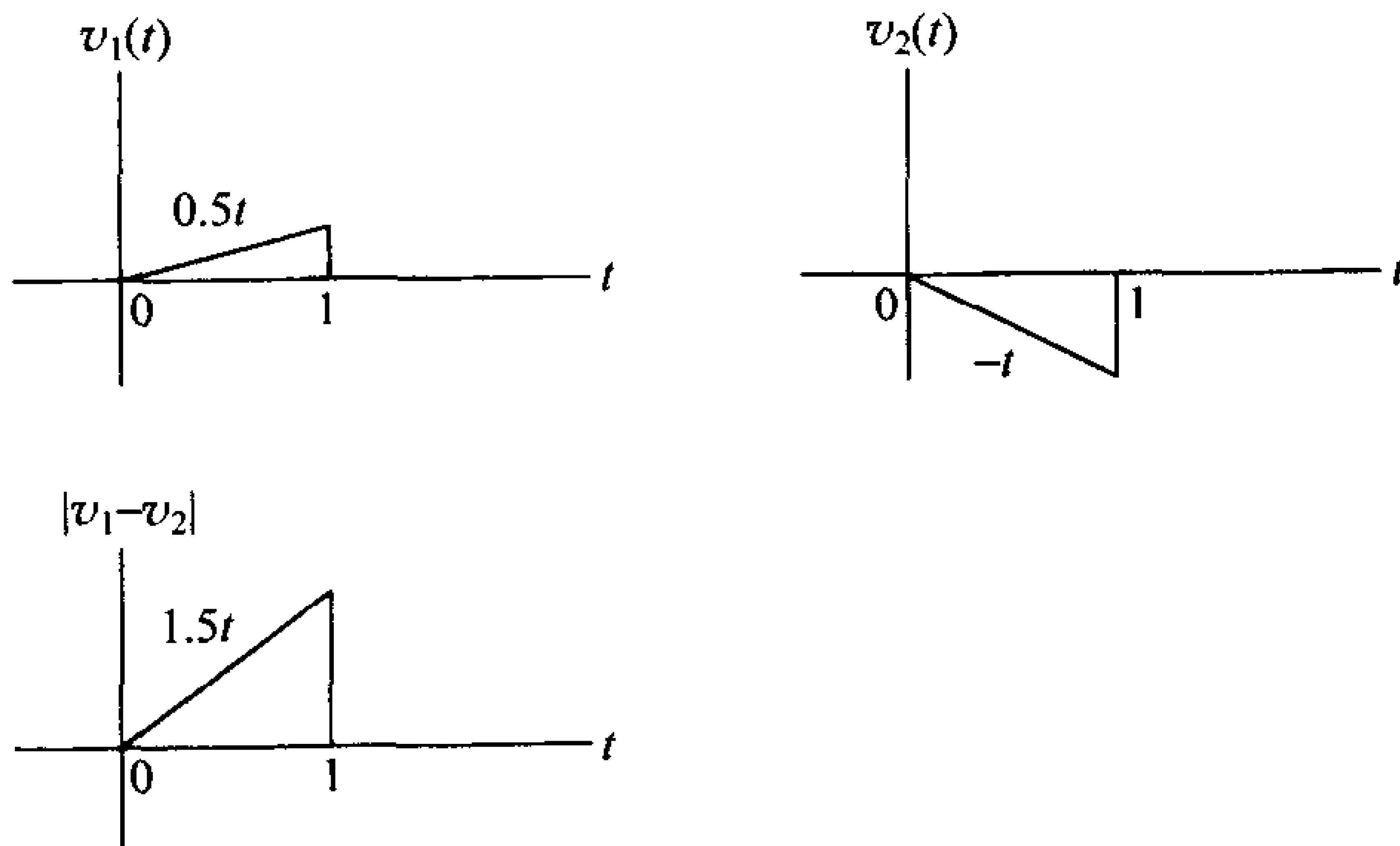


图 2-3 例 2.5 的波形

解 图 2-3 给出了 $v_1(t)$，$v_2(t)$以及 $|v_1(t)-v_2(t)|$ 的波形. $|v_1(t)-v_2(t)|$ 的最大值为 1.5，所以

$$d_\infty(v_1, v_2)=1.5$$

同样地，

$$d_1(v_1, v_2)=\int_0^1 |v_1-v_2|\,\mathrm{d}t=\int_0^1 1.5t\,\mathrm{d}t=0.75$$

$$d_2(v_1,v_2)=\left[\int_0^1 |v_1-v_2|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}=\left[\int_0^1 \frac{9}{4}t^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}$$

$$d_3(v_1,v_2)=\left[\int_0^1 |v_1-v_2|^3 \mathrm{d}t\right]^{1/3}=\left[\int_0^1 \frac{27}{8}t^3 \mathrm{d}t\right]^{1/3}=\left(\frac{27}{32}\right)^{1/3}$$ ■

练习 2.1　设 $v_1(t)=0.5t$，$0\leqslant t<1$（如图 2-3），$v_2(t)=u(t)-u(t-1)$（方形脉冲）. 求这两个向量在式(2-4)～式(2-7)定义的 4 种度量下的距离. 令式（2-7）中的 $p=3$.

答案：$d_\infty=1$，$d_1=3/4$，$d_2=\sqrt{7/12}$，$d_3=\sqrt[3]{15/32}$.

例 2.6　对于离散时间波形，与例 2.5 类似地定义 4 种度量如下：

$$d_\infty(v_1,v_2)=\max_{0\leqslant n\leqslant N-1}|v_1(n)-v_2(n)| \tag{2-8}$$

$$d_1(v_1,v_2)=\sum_{n=0}^{N-1}|v_1(n)-v_2(n)| \tag{2-9}$$

$$d_2(v_1,v_2)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}|v_1(n)-v_2(n)|^2\right]^{1/2} \tag{2-10}$$

$$d_p(v_1,v_2)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}|v_1(n)-v_2(n)|^p\right]^{1/p} \tag{2-11}$$

33～34

求 $v_1(n)=4$ 与 $v_2(n)=n+1$ 之间的距离，其中，$0\leqslant n\leqslant 3$. 在最后一种情况中，取 $p=3$.

解　图 2-4 给出了 $v_1(n)$，$v_2(n)$，$|v_1(n)-v_2(n)|$ 及其平方 $|v_1(n)-v_2(n)|^2$ 的波形. $|v_1(n)-v_2(n)|$ 的最大值为 3，因此

$$d_\infty(v_1,v_2)=3$$

类似地，

$$d_1(v_1,v_2)=\sum_{n=0}^{N-1}|v_1(n)-v_2(n)|=3+2+1=6$$

$$d_2(v_1,v_2)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}|v_1(n)-v_2(n)|^2\right]^{1/2}=(9+4+1)^{1/2}=\sqrt{14}$$

$$d_p(v_1,v_2)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}|v_1(n)-v_2(n)|^p\right]^{1/p}=(27+8+1)^{1/3}=\sqrt[3]{36}$$

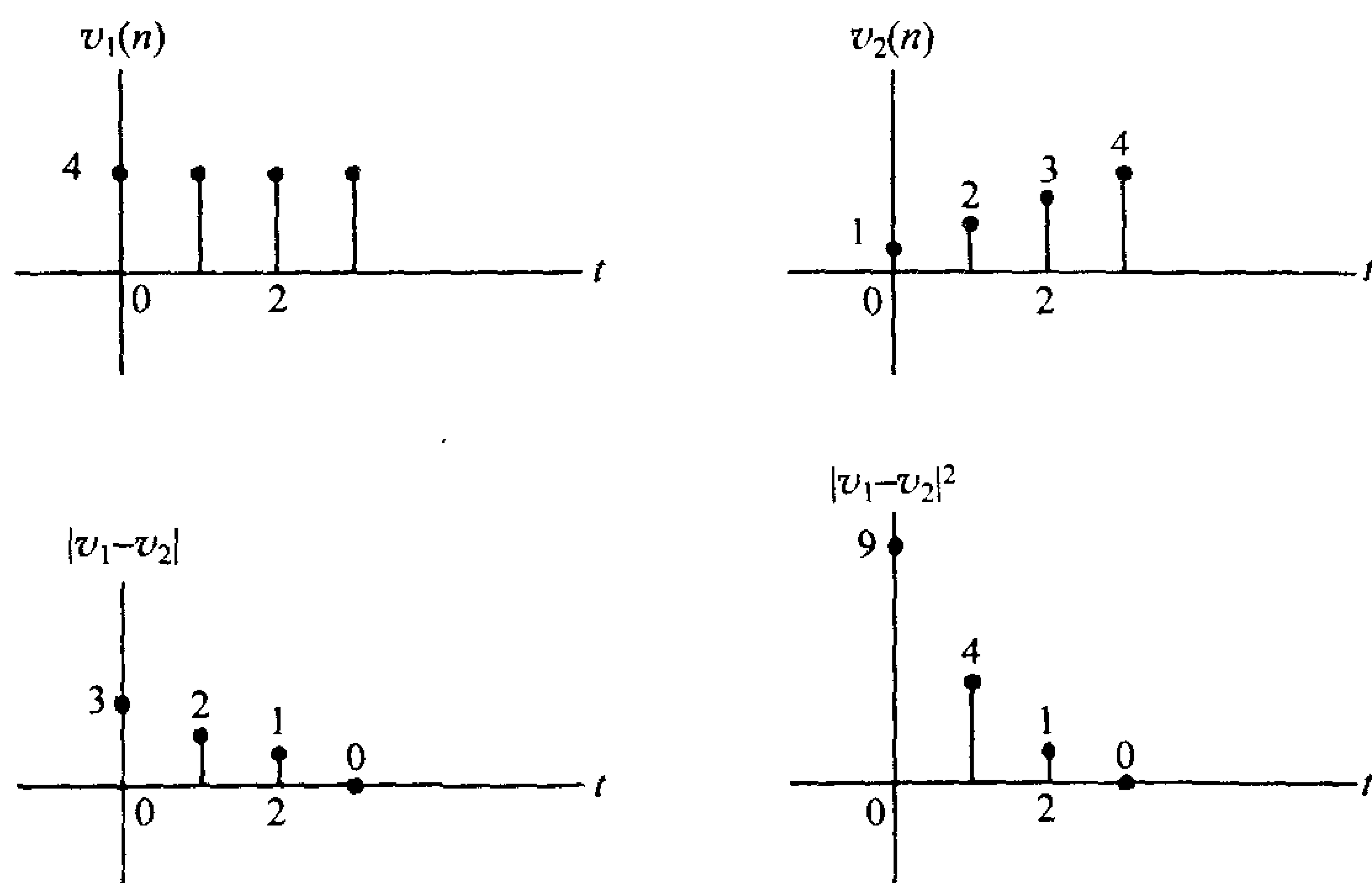


图 2-4　例 2.6 的离散时间波形

■

上述这些例子表明，对于给定的两个向量，不同的距离定义使得它们之间距离的值不一样. 这并非无应用背景的纯学术练习，而是因为在不同的应用中需要使用不同的距离. 例如，在编码理论中使用最多的距离是 d_1，而在系统理论中常使用 d_2 和 d_∞. 注意，在系统理论中波形是向量，它在各方面都等同于几何向量，甚至在许多方面比几何向量更加重要. 系统理论(system theory)又被称为应用几何(applied geometry)，道理就在于此.

35

练习 2.2　求图 2-5 所示的两个向量在式(2-8)至式(2-11)定义的 4 种度量下的距离. 令式 (2-11)中的 $p=3$.

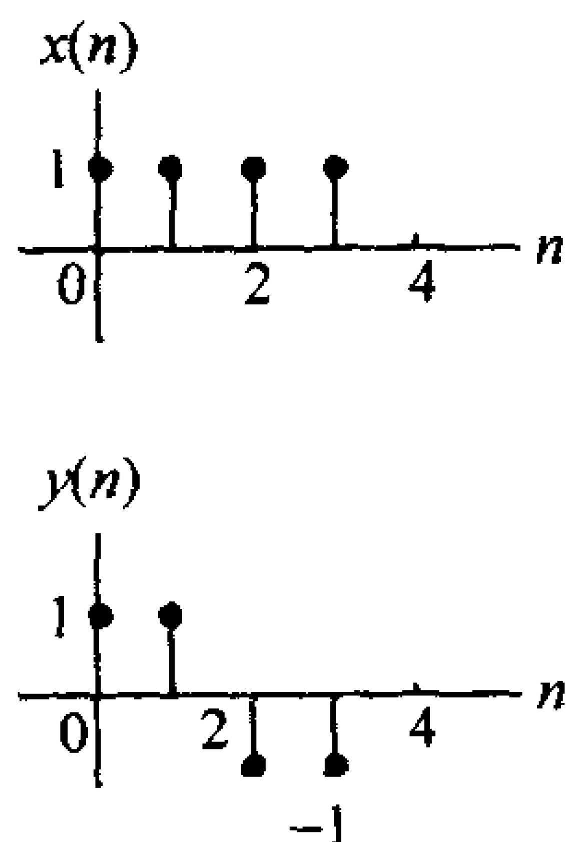


图 2-5　两个向量

答案：$d_\infty=2$，$d_1=4$，$d_2=\sqrt{8}$，$d_3=\sqrt[3]{16}$.

2.3 范数

一个度量空间就是一个有序对(X, d)，其中X是一个集合，d是一个函数. 注意，集合X可以不是一个向量空间. 换句话说，距离的概念适用于任何集合. 现在，我们希望通过长度把距离的概念引入向量空间.

定义 2.3 设$V=\{v_i\}$是一个向量空间. 定义向量v的长度$\|v\|$是一个满足下列 3 个条件的映射$\|\cdot\|: X\to R$，并称之为范数(norm).

(i) $\|v\|=0$当且仅当$v=v_0$，v_0为零向量.

(ii) $\|av\|=|a|\ \|v\|$ 对所有$v\in V$，$a\in A$成立.

(iii) $\|v_1+v_2\|\leqslant\|v_1\|+\|v_2\|$对所有$v_1$，$v_2\in V$成立.

向量的范数是向量的大小或长度的一种度量. 性质(ii)和(iii)告诉我们，范数必须定义在这样一个集合上，在这个集合上，向量相加和向量与数的乘积是有意义的. 正因为如此，V必须是一个向量空间.

例 2.7 由所有定义在$a\leqslant t\leqslant b$上的连续时间波形$\{v_i(t)\}$构成的集合的 4 种范数定义如下：

36

$$\|v\|_\infty=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|v(t)| \tag{2-12}$$

$$\|v\|_1=\int_a^b|v(t)|\mathrm{d}t \tag{2-13}$$

$$\|v\|_2=\left[\int_a^b|v(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2-14}$$

$$\|v\|_p=\left[\int_a^b|v(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2-15}$$

当$0\leqslant t\leqslant 1$时，求波形$v_1(t)=0.5t$和$v_2(t)=-t$的范数. 在最后一种范数中，令$p=3$. (图 2-2 显示了这两个波形.)

解

$$\|v_1\|_\infty=0.5 \qquad \|v_2\|_\infty=1$$

$$\|v_1\|_1=\int_0^1 0.5t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^2\Big|_0^1=\frac{1}{4} \qquad \|v_2\|_1=\int_0^1 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\|v_1\|_2=\left[\int_0^1\frac{1}{4}t^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}=\left(\frac{1}{12}\right)^{1/2} \qquad \|v_2\|_2=\left[\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}$$

$$\|v_1\|_3=\left[\int_0^1\frac{1}{8}t^3\mathrm{d}t\right]^{1/3}=\left(\frac{1}{32}\right)^{1/3} \qquad \|v_2\|_3=\left[\int_0^1 t^3\mathrm{d}t\right]^{1/3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}$$

■

练习 2.3 设$v(t)=2t$，$0\leqslant t<1$(最大高度为 2 的三角脉冲)，求该向量在式(2-12)～式(2-15)意义下的 4 种范数.

答案： $\|v\|_\infty=2$，$\|v\|_1=1$，$\|v\|_2=\sqrt{4/3}$，$\|v\|_3=\sqrt[3]{2}$.

例 2.8 由所有定义在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 上的离散时间波形 $\{v_i(n)\}$ 构成的集合的4种范数定义如下：

37

$$\| v \|_\infty = \max_{0\leqslant n\leqslant N-1} | v(n) | \tag{2-16}$$

$$\| v \|_1 = \sum_{n=0}^{N-1} | v(n) | \tag{2-17}$$

$$\| v \|_2 = \left[\sum_{n=0}^{N-1} | v(n) |^2 \right]^{1/2} \tag{2-18}$$

$$\| v \|_p = \left[\sum_{n=0}^{N-1} | v(n) |^p \right]^{1/p} \tag{2-19}$$

对每一种定义，求 $v_1(n)=4$ 和 $v_2(n)=n+1$ 的范数，其中 $0\leqslant n\leqslant 3$，式(2-19)中取 $p=3$.（这两个波形的图示见图 2-4.）

解

$\| v_1 \|_\infty = 4$　　　$\| v_2 \|_\infty = 4$

$\| v_1 \|_1 = 4(4) = 16$　　　$\| v_2 \|_1 = 4+3+2+1 = 10$

$\| v_1 \|_2 = \sqrt{4(4^2)} = 8$　　　$\| v_2 \|_2 = \sqrt{16+9+4+1} = \sqrt{30}$

$\| v_1 \|_3 = \sqrt[3]{4(4)^3} = \sqrt[3]{256}$　　　$\| v_2 \|_3 = (64+27+8+1)^{1/3} = (100)^{1/3}$

■

例 2.9 求图 2-5 中 $y(n)$ 的长度，范数的定义如式(2-16)～式(2-19)，其中式(2-19)中取 $p=3$.

答案： $\|y\|_\infty=1$，$\|y\|_1=4$，$\|y\|_2=2$，$\|y\|_3=\sqrt[3]{4}$. ■

距离和长度的基本区别在于，距离是指两个对象之间的距离，而长度则是针对一个对象而言的. 因此，这两个概念是有区别的，它们之间没有必然的联系. 然而，通过由范数导出的度量可以将二者关联起来. 一旦定义了向量空间的范数，就可以由下式导出一个度量：

$$d(v_1, v_2) = \| v_1 - v_2 \| \tag{2-20}$$

38

即将两个向量的距离赋值为这两个向量的差的长度(范数).

2.4 内积

在向量空间中关于向量的度量这个层面上，还有一个概念，这就是内积(inner product).

定义 2.4 符号 $\langle v_1 \mid v_2 \rangle$ 表示从一对向量中抽取一个数的运算，称为内积

(inner product)或点积(dot product). 对所有标量 $a_i \in C$ 和向量 $v_i \in V$，该运算满足下列 4 个性质.

(i) $\langle v_1 \mid v_2 \rangle = \langle v_2 \mid v_1 \rangle^*$.

(ii) $\langle v_1 + v_2 \mid v_3 \rangle = \langle v_1 \mid v_3 \rangle + \langle v_2 \mid v_3 \rangle$.

(iii) $\langle a v_1 \mid v_2 \rangle = a^* \langle v_1 \mid v_2 \rangle$.

(iv) $\langle v_1 \mid v_1 \rangle \geqslant 0$；当且仅当 $v_1 = v_0$(零向量)时，有 $\langle v_1 \mid v_1 \rangle = 0$.

式中 a^* 表示 a 的共轭复数.

若一个向量空间 $V = \{v_i\}$ 满足这些性质，就称它是一个内积空间(inner product space). 内积空间是一个可以进行几何分析和运算的空间，因为由内积可以导出范数，由范数又可以导出度量. 由内积导出的范数为

$$\| v_1 \| = \langle v_1 \mid v_1 \rangle^{1/2} \tag{2-21}$$

上式表明，由内积求范数，就是先求向量与其本身的内积，然后再求内积的平方根. 式(2-20)和式(2-21)建立了从内积到范数再到度量的“链”，但是此过程不可逆. 需要说明的是，两个向量之间的“夹角”θ 定义如下：

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1 \mid v_2 \rangle}{\| v_1 \| \; \| v_2 \|} \tag{2-22}$$

在复数域 C 上的空间 $V = C^n$ 中，两个向量 39

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad 和 \quad v_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

的标准内积为

$$\langle v_1 \mid v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i \tag{2-23}$$

写成矩阵形式为 $\langle v_1 \mid v_2 \rangle = v_1^{\mathrm{H}} v_2$，其中 v_1^{H} 是 v_1 的埃尔米特(Hermite)共轭，即矩阵 v_1 的共轭的转置：

$$v_1^{\mathrm{H}} = v_1^{*t}$$

例如，若 $v_1 = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{j} & 2 \\ -1 & 3-\mathrm{j}2 \\ -3 & 1-\mathrm{j} \end{bmatrix}$，则

$$v_1^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{j} & -1 & -3 \\ 2 & 3+\mathrm{j}2 & 1+\mathrm{j} \end{bmatrix}$$

当用 MATLAB 求一个其元素为复数的矩阵的转置时，得到的将是它的埃尔米特

共轭. 如果不清楚这一点，就会对所得的结果感到不可思议.

由内积导出的范数为

$$\| v_1 \|_2 = \langle v_1 \mid v_1 \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} \tag{2-24}$$

度量(两个向量的距离)为

40

$$d_2(v_1, v_2) = \| v_1 - v_2 \|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^2 \right]^{1/2} \tag{2-25}$$

这两个公式是度量长度和距离的常用方法，在欧几里得几何中我们对此并不陌生.

值得注意的是，由式(2-23)定义的内积是将两个矩阵 v_1 和 v_2 的对应元素相乘，即 a_1^* 乘 b_1，a_2^* 乘 b_2，如此类推. 对于 $m \times n$ 的矩阵，也可按与此相同的方法求内积. 例如，对于

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

有

$$\langle A \mid B \rangle = a_{11}^* b_{11} + a_{12}^* b_{12} + a_{21}^* b_{21} + a_{22}^* b_{22}$$

另一个求矩阵内积的公式是

$$\langle A \mid B \rangle = \mathrm{trace}(A^{\mathrm{H}} B)$$

其中，矩阵的迹(trace)是指矩阵的主对角元素之和. 无疑，这两个式子得到的结果是一致的.

例 2.10 求下面两个向量 x 与 y 的内积、长度和它们之间的距离.

$$x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解 x 与 y 的内积就是 $x^{\mathrm{H}} y$ 的对角线元素之和.

$$x^{\mathrm{H}} y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

对角元素之和为 $-4+2=-2$，因此，x 与 y 的内积为 -2. 注意，如果求两个矩阵对应元素乘积的和也会得到同样的结果. 计算两个 $M \times N$ 矩阵的内积的 3 个等价公式为

41

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} x_{mn}^{*t} y_{mn} = \mathrm{trace}(x^{*t} y) = \mathrm{trace}(x^* y^t)$$

根据内积导出的范数式(2-21)，有

$$\| x \| = \langle x \mid x \rangle^{1/2} = (\mathrm{trace}(x^{\mathrm{H}} x))^{1/2}$$

再由式(2-20)，可以求得 x 和 y 之间的距离为

$$d(x,y) = \| x - y \| = [\mathrm{trace}((x-y)^{\mathrm{H}}(x-y))]^{1/2}$$

下面是对应的 MATLAB 程序及其运行结果：

```
% Example 2.10
clear

x = [ 2 -1
      0 1
      -2 -1];

y = [ -1 0
      2 2
      1 0];

ip = trace(x'*y)
xnorm = sqrt(trace(x'*x))
ynorm = sqrt(trace(y'*y))
dist = sqrt(trace((x-y)'*(x-y)))
```

$$\langle x \mid y \rangle = -2$$

$$\| x \| = \sqrt{11} = 3.3166$$

$$\| y \| = \sqrt{10} = 3.1623$$

$$d(x,y) = 5$$

■

例 2.11　求下面两个向量 x 与 y 的内积、长度和它们之间的距离.　42

$$x = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{j} \\ 2 \\ 2+\mathrm{j} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 2-\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} \\ 1-\mathrm{j}2 \end{bmatrix}$$

解

$$\langle x \mid y \rangle = x^{*\prime} y = [1+\mathrm{j} \quad 2 \quad 2-\mathrm{j}] \begin{bmatrix} 2-\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} \\ 1-2\mathrm{j} \end{bmatrix} = 5-\mathrm{j}2$$

$$\| x \| = (x^{*\prime} x)^{1/2} = \sqrt{11}$$

$$\| y \| = (y^{*\prime} y)^{1/2} = \sqrt{12}$$

$$d(x,y) = [(x-y)^{*\prime}(x-y)]^{1/2} = \sqrt{13}$$

根据定义，长度和距离恒为正实数.

■

现在，我们考虑 4 类不同信号以及它们通常的内积定义.

1. 连续时间能量信号:

$$\langle v_1 \mid v_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_1^*(t) v_2(t) \mathrm{d}t \tag{2-26}$$

2. 连续时间功率信号:

$$\langle v_1(t) \mid v_2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} v_1^*(t) v_2(t) \mathrm{d}t \tag{2-27a}$$

对两个周期均为 T 的周期信号而言，上式可以简化为

43

$$\langle v_1(t) \mid v_2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_1^*(t) v_2(t) \mathrm{d}t \tag{2-27b}$$

3. 离散时间能量信号:

$$\langle v_1(n) \mid v_2(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_1^*(n) v_2(n) \tag{2-28}$$

4. 离散时间功率信号:

$$\langle v_1(n) \mid v_2(n) \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} v_1^*(n) v_2(n) \tag{2-29a}$$

对两个周期均为 N 的周期信号而言，上式可以简化为

$$\langle v_1(n) \mid v_2(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_1^*(n) v_2(n) \tag{2-29b}$$

每一种内积又可以导出它们各自的范数和度量. 例如，对离散时间能量信号，有

$$\| v(n) \|_2 = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} | v(n) |^2 \right]^{1/2} \tag{2-30}$$

$$d(v_1, v_2) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} | v_1(n) - v_2(n) |^2 \right]^{1/2} \tag{2-31}$$

注意，范数的平方就是信号的能量.

$$E = \| v(n) \|_2^2 \tag{2-32}$$

类似地，功率信号的范数的平方就是信号的功率.

例 2.12 求下列两个复指数信号的内积、范数和它们之间的距离.

44

$$v_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad v_2(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}$$

解 两个信号均是周期为 $T=2\pi/\omega$ 的功率信号，因此

$$\langle v_1 \mid v_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t = 0$$

注意，复指函数在周期的整数倍区间内的积分为 0. v_1 的范数为

$$\| v_1 \| = \| e^{j\omega t} \| = \left[\frac{1}{T}\int_0^T e^{-j\omega t} e^{j\omega t} dt\right] = 1$$

式中的 $e^{-j\omega t}e^{j\omega t}=1$. 类似地，$v_2$ 的范数也为 1，v_1 和 v_2 的距离为

$$d(v_1, v_2) = \left[\frac{1}{T}\int_0^T (e^{j\omega t} - e^{j2\omega t})(e^{j\omega t} - e^{j2\omega t}) dt\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{T}\int_0^T (2 - 2\cos\omega t) dt\right]^{1/2} = \sqrt{2}$$

■

练习 2.4　求图 2-5 中的信号 $x(n)$和 $y(n)$的内积.

答案：0.

2.5　正交性

若两个向量的内积为 0，则称它们是*正交的*(orthogonal). 人们往往习惯于把正交与 90°角联系起来. 但是，我们所讨论的波形并没有明确的方向. 所以，当我们使用正交一词时，不必总是把它与“直角”联系起来. 对于波形而言，正交就是意味着$\langle v_1 \mid v_2 \rangle = 0$. 例 2.12 中的两个波形是正交的，因为它们的内积为 0. 正交是两个不同频率的复指信号的一般特性.

Cauchy-Buniakovsky-Schwartz 不等式

设 V 是一个内积空间，也就是说，我们可以对其中的向量进行几何分析和刻画，那么下面的不等式对任意内积都成立. 设 u，$v \in V$，则

45

$$|\langle u \mid v \rangle|^2 \leqslant \langle u \mid u \rangle \langle v \mid v \rangle \tag{2-33}$$

当且仅当 $u = kv$ 时等式成立. 下面我们从内积的性质出发来对它进行证明：首先，假设 v 是零向量，即 $v = v_0$，则由定义 2.4 的性质(iv)，等式成立. 若 v 不是零向量，即 $v \neq v_0$，有

$$0 \leqslant \langle u - \lambda v \mid u - \lambda v \rangle = \langle u \mid u \rangle - 2\lambda \langle u \mid v \rangle + \lambda^2 \langle v \mid v \rangle \tag{2-34}$$

对所有 λ 成立. 令 $\lambda = \langle u \mid v \rangle / \langle v \mid v \rangle$，则式(2-34)为

$$0 \leqslant \langle u \mid u \rangle - 2\frac{\langle u \mid v \rangle^2}{\langle v \mid v \rangle} + \frac{\langle u \mid v \rangle^2}{\langle v \mid v \rangle} = \langle u \mid u \rangle - \frac{\langle u \mid v \rangle^2}{\langle v \mid v \rangle}$$

这就证明了式(2-33)给出的 CBS 不等式成立.

例 2.13 说明 CBS 不等式对例 2.10 中的两个矩阵成立.

$$x=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

解 直接利用例 2.10 的结果，有

$$|\langle x \mid y\rangle|^2=4\quad \langle x \mid x\rangle=11\quad \langle y \mid y\rangle=10$$

因此，CBS 不等式成立. ■

难题解答：假如我们一开始就考虑一个方形，那就彻底完蛋了．正确的方法是，考虑它是一个圆．实际的物体是一个带有开槽的圆柱，如图 2-6 所示.

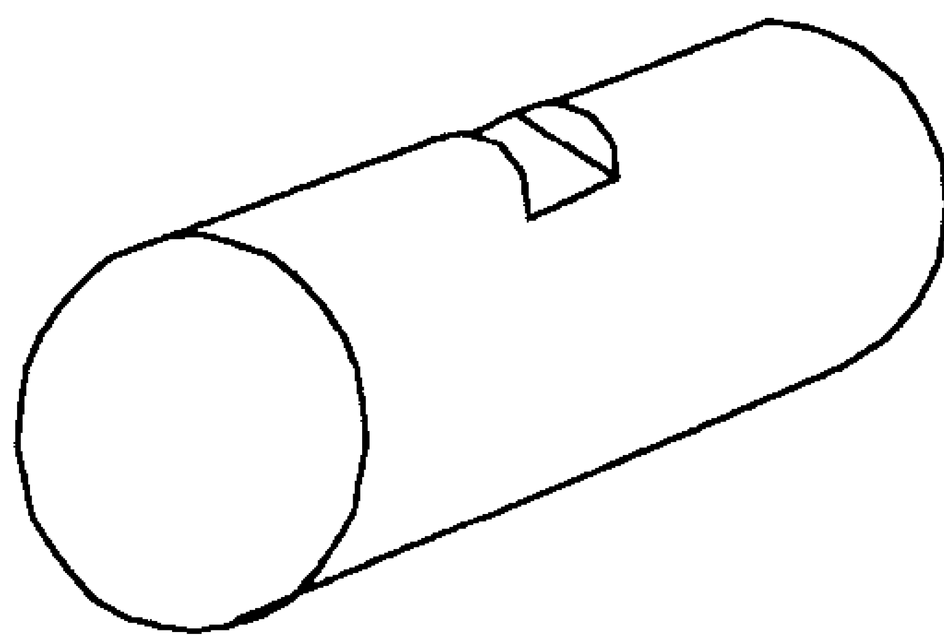


图 2-6 难题解答

第3章 基和维数

在引入小波变换之前，作为准备，本章介绍向量空间的一些一般性概念. 这些概念包括基、维数、正交性和由集合张成的空间. 它们都是建立在第 2 章所述的向量空间和内积概念的基础上的.

回顾向量空间的定义，我们知道向量空间的定义源自几何向量的性质，而内积则赋予了向量空间一个重要的结构. 特别是，由内积 $\langle v_1 \mid v_2 \rangle$ 可以按如下公式导出范数：

$$\| v \| = \langle v \mid v \rangle^{1/2}$$

进一步，由范数又可以导出两个向量的度量或距离.

$$d(v_1, v_2) = \| v_1 - v_2 \|$$

这就使得向量空间具有了几何特性. 就是说，一旦定义了向量空间的内积，我们就能够度量向量的长度和两个向量的夹角和距离. 两个向量 v_1 和 v_2 的夹角定义为

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1 \mid v_2 \rangle}{\| v_1 \| \| v_2 \|}$$

本章将引入向量空间的另外一些课题，即与基和维数有关的概念. 要注意的是一个向量空间的维数也许跟你想像的并不一样. 例如，下面这个向量的维数可以是 1 到 N 之间的任意数

$$v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

维数的概念是针对一个向量集而不是单个向量的. 落在平面上的全体向量的维数为 2，尽管它们可能有 N 个分量.

另一个容易使人混淆的概念是基(basis). 一个基是一个向量集，它满足两个性质：该向量集中的向量是线性无关的，空间中的任何向量都可以表示为基向量的线性组合.

本章目标 **读完本章以后，读者应该掌握：**

- 判断一个向量集是否线性无关.
- 求一个给定向量空间的基.
- 对给定的基，将任意向量表示成以基为坐标的形式.
- 求对偶基.

3.1 线性无关

下面，我们从最基本的问题出发，首先给出线性无关的定义.

定义 3.1 域 A 上的向量空间 V 的一个向量集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 称为是线性无关(linearly independent)的，如果使得等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \tag{3-1}$$

成立的唯一标量组 $\{a_i\}$ 全为 0. 不是线性无关的向量集称为是线性相关的.

对于初学者而言，用常规思维很难理解这一定义，而线性相关的概念也许更好理解一些. 一个向量集是线性相关的，假如该向量集中的某一个向量可以表示为其他向量的线性组合. 一个向量集要么是线性相关的，要么是线性无关的，不会介于二者之间，因此，我们无论使用哪个定义都可以.

例 3.1 判断下面的欧几里得向量是否线性相关.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

48

解 假如它们线性相关，那么根据定义，它们中的任意一个向量都可以表示成另外两个向量的线性组合. 例如，

$$v_1 = av_2 + bv_3$$

或写成

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在上式中，可以取 $a=0.25$，$b=-0.5$. 因此，它们线性相关. ■

练习 3.1 下列向量是否线性无关?

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}-7\\2\\-5\end{bmatrix}\quad v_3=\begin{bmatrix}-6\\4\\0\end{bmatrix}$$

答案：线性无关.

例 3.2 设 P_n 是次数不超过 n 的所有多项式的集合. 判断下列属于 P_2 的多项式是线性相关还是线性无关.

$$p_1(x)=1+2x$$

$$p_2(x)=2x+3x^2$$

$$p_3(x)=1+2x+3x^2$$

解 要判断它们是否线性无关，只要将其表示为

$$a_1p_1(x)+a_2p_2(x)+a_3p_3(x)=0$$

然后看是否存在非零的 a_i 使上式成立. 假如存在非零的 a_i 使上式成立，则线性相关；否则，线性无关. 将 p_1，p_2，p_3 代入上面的方程，得

$$a_1(1+2x)+a_2(2x+3x^2)+a_3(1+2x+3x^2)=0$$

令方程两边对应系数相等，有

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\tag{3-2}$$

因为系数矩阵之行列式的值为 6，因此，向量是线性无关的. 因为系数矩阵的行列式之值不为 0，所以，方程(3-2)只有当 a_i 全为 0 时方成立，这正好满足线性无关的条件. ■

在上面的例子中，系数矩阵都是方阵. 下面给出一个系数矩阵不是方阵的例子，其判断过程与方阵的情况相同.

例 3.3 判断下面三个向量是否线性无关.

$$v_1=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}4\\1\\0\\1\\4\\9\end{bmatrix}\quad v_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

解 将式(3-1)展开，写成

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \tag{3-3}$$

将给定的向量代人其中，并写成矩阵的形式，得方程(3-4). 这是一个超定方程组，也就是说方程的个数大于未知数的个数. 对于这种情况，我们需要引用线性代数的一个定理(在有些微积分的书中也能找到这个定理，请查阅有关线性代数的章节).

50

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

定理 *一个具有 m 个方程和 n 个未知数的齐次系统(如方程(3-4))具有不全为 0 的解 a_1, a_2, …, a_n，当且仅当系数矩阵的秩 r 小于 n.*

矩阵的秩是指矩阵的非零子式的最高维数. 式(3-4)中系数矩阵的第 1，2，4 行构成一个非零子式. 它是一个 3×3 的矩阵，所以，系数矩阵的秩为 3. 因此，唯一可能使方程组成立的 a_i 的组合是它们全为 0，这就意味着向量是线性无关的. ■

练习 3.2 判断下列三个向量是否线性无关.

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

答案：线性相关. 事实上，$2v_1 + v_2 - v_3 = 0$.

3.2 基

基是一个向量的集合，满足两个性质：空间中的任何向量都可以表示为基向量的线性组合，并且表示是唯一的. 下面的定义可以确保这两个条件得到满足.

51

定义 3.2 给定向量空间 V，V 的一个子集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 构成它的一个基，如果子集中的向量线性无关并且假如在子集中添加 V 中的任何其他非 0 向量都使得子集线性相关.

仔细考虑上述定义. 图 3-1a 给出了二维平面上的一些向量. 令 e_1 和 e_2 是待选的基向量. 显然 v_1 能表示成这两个向量的线性组合，而 v_2 却不能. 因为 e_1 和 e_2 线性相关，因此基向量个数不够. 图 3-1b 给出了三个待选基向量 e_1，e_2，e_3. 用它们表示 v_1 是足够的，但是，表达方式不唯一. 我们可以用 e_1 和 e_2 来表示 v_1，也可以用 e_2 和 e_3 来表示，还可以用 e_1 和 e_3 来表示. 这里的问题还是在于待选的基向量线性相关.

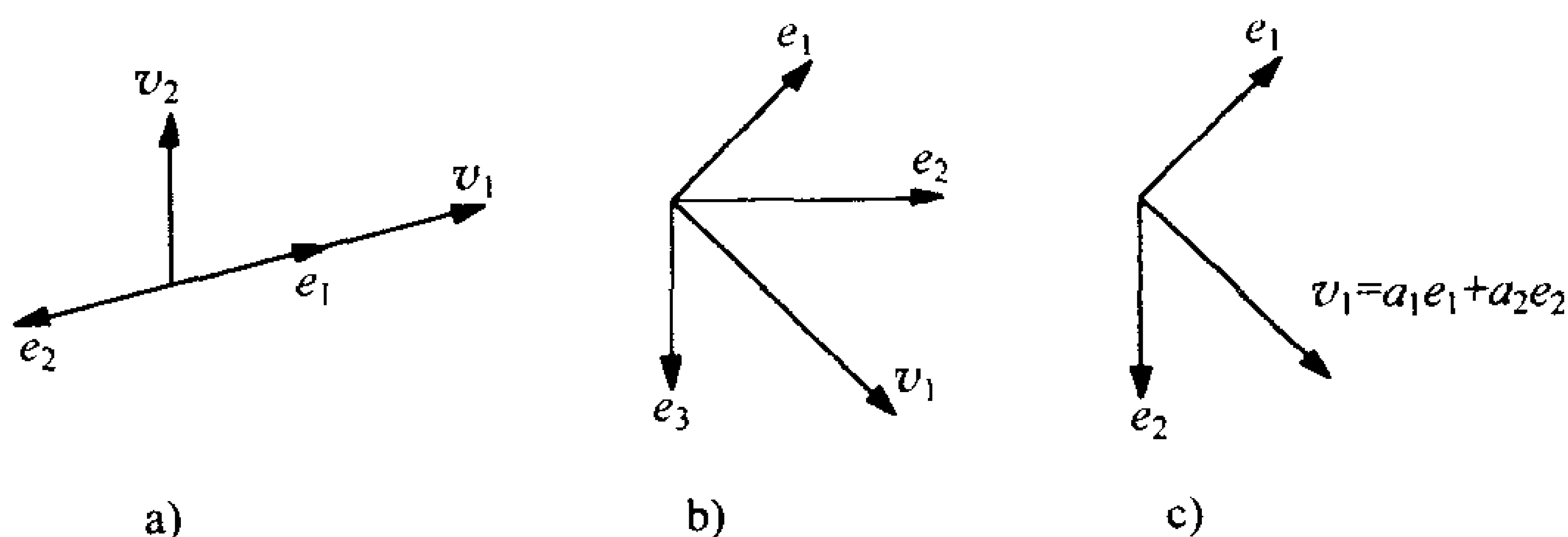


图 3-1 基的图示

要构成一个基，必须有不多不少的向量，定义 3.2 指明了所需要的向量个数. 图 3-1c 显示了构成二维平面的基所需要的向量的个数. 从图 3-1c 我们看到，任何向量，比如 v_1，都能够唯一地表示为 e_1 和 e_2 的线性组合.

因为线性相关，所以例 3.1 中的向量不构成三维欧几里得空间的基. 例 3.2 中的向量构成 P_2 的基，因为它们满足定义 3.2 的条件. 例 3.3 的向量线性无关，但是它们不足以表示空间中的所有向量，也就是说，它们没有足够多的向量来构成一组基.

52

例 3.4 例 3.2 中的向量 $\alpha=\{p_1, p_2, p_3\}$ 构成 P_2 的一组基. 这意味着 P_2 中的任何其他多项式都可以用 p_1，p_2，p_3 唯一地表示出来. 试用基表示如下多项式.

$$p_4(x) = 3 + 2x - 3x^2$$

解 将 $p_4(x)$ 写成 $p_4(x)=a_1 p_1(x)+a_2 p_2(x)+a_3 p_3(x)$，即

$$3 + 2x - 3x^2 = a_1(1 + 2x) + a_2(2x + 3x^2) + a_3(1 + 2x + 3x^2)$$

$$= a_1 + a_3 + x(2a_1 + 2a_2 + 2a_3) + x^2(3a_2 + 3a_3)$$

比较方程两边对应系数，有

$$a_1 + a_3 = 3$$

$$2a_1 + 2a_a + 2a_3 = 2$$

$$3a_2 + 3a_3 = -3$$

解方程组，得 $a_1=2$，$a_2=-2$，$a_3=1$. 因此，$p_4(x)$可以表示为

$$p_4(x) = 2p_1(x) - 2p_2(x) + p_3(x)$$

注意，这种表示是唯一的，即不可能用 $p_1(x)$，$p_2(x)$，$p_3(x)$的其他线性组合来表示 $p_4(x)$.

分量 a_1，a_2 和 a_3 被称为 p_4 关于基 α 的坐标. 记作

$$[P_4(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

53 在第 4 章中，我们将会用到这个概念. ■

练习 3.3 对于例 3.4 中的基，求下列多项式的坐标：

$$p_5(x) = 5 + 2x - x^2$$

答案： $[p_5(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -4 \\ 11/3 \end{bmatrix}$.

3.3 维数和张空间

一个向量空间的维数(dimension)就是它的基包含的向量个数. 我们通常把坐标的个数称作维数. 这样做有时可能是对的，但是维数并不由单个向量决定，而是由空间中的所有向量决定. 因此，确定维数的正确方法是看基中包含有多少个向量.

现在引入一个新术语. 假如向量空间 V 的任何一个向量都能够被表示成 V 的一个子集$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$的线性组合，我们就说该空间由$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$张成，记作

$$V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

注意，这与基是不相同的概念. 在这里，我们并不要求表示是唯一的. 换句话说，一个用于张成整个空间的集合所包含的向量的个数可以大于空间的维数. 基可以张成整个空间，而包含基的任何其他集合也可以张成整个空间.

例 3.5 求由下列向量张成的集合的基.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解 这 4 个向量中的任何 3 个都构成基. 比如$\{v_1, v_3, v_4\}$，它们是线性无关的，而且任何 3×1 的实数矩阵都可以表示成它们的线性组合. 注意，$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$包含的向量个数大于基所含有的向量的个数. ■ [54]

例 3.6 设 P_2 是所有次数不高于 2 的多项式的集合，那么下列多项式的集合张成 P_2. 求该集合的一组基，并用基把其他多项式表示出来.

$$x_1(t) = 1$$

$$x_2(t) = 2t + 2t^2$$

$$x_3(t) = 1 + t + t^2$$

$$x_4(t) = 2t - t^2$$

解 因为

$$x_3(t) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)$$

所以前 3 个向量线性相关，因此它们不构成基. 现在考虑$\{x_1, x_2, x_4\}$，它们是线性无关的，而且张成整个空间，符合基的条件，因此构成一组基.

为了把 x_3 表示成基的线性组合，先将 x_3 写成

$$x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_4(t)$$

即

$$1 + t + t^2 = a_1 + a_2(2t + t^2) + a_3(2t - t^2)$$

令方程两边对应系数相等，有

$$1 = a_1 \qquad \text{或} \qquad a_1 = 1$$

$$t = 2a_2 t + 2a_3 t \qquad \text{或} \qquad 2a_2 + 2a_3 = 1$$

$$t^2 = a_2 t^2 - a_3 t^2 \qquad \text{或} \qquad a_2 - a_3 = 1$$

把方程表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[55]

因此，$a_1=1$，$a_2=3/4$，$a_3=-1/4$(使用MATLAB求解).

验算：$x_3(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+a_3x_4(t)$是否成立?

$$x_3(t)=1+\frac{3}{4}(2t+t^2)-\frac{1}{4}(2t-t^2)$$

$$=1+t+t^2$$

结果正确. 因此，x_3 关于基$\{x_1, x_2, x_4\}$的分量为

$$[x_3]_{\{x_1,x_2,x_4\}}=\begin{bmatrix}1\\3/4\\-1/4\end{bmatrix}$$

■

3.4 对偶基

令$\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$和$\{y_1, y_2, \cdots, y_N\}$均为向量空间的子集，并满足

$$\langle x_i \mid y_j\rangle=\delta_{ij}\quad i,j,=1,2,\cdots,N \tag{3-5}$$

例如，当 $N=3$ 时，有

$$\langle x_1 \mid y_1\rangle=1\quad \langle x_1 \mid y_2\rangle=0\quad \langle x_1 \mid y_3\rangle=0$$

$$\langle x_2 \mid y_1\rangle=0\quad \langle x_2 \mid y_2\rangle=1\quad \langle x_2 \mid y_3\rangle=0$$

$$\langle x_3 \mid y_1\rangle=0\quad \langle x_3 \mid y_2\rangle=0\quad \langle x_3 \mid y_3\rangle=1$$

注意，$\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$和$\{y_1, y_2, \cdots, y_N\}$是同一空间的而不是不同空间的两个向量集. 我们称这样的两个集合是**互为对偶的向量集**(reciprocal sets of vectors).

需要说明的是，只可能有一个向量集与$\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$成对偶关系. 若 [56] $\{v_1, v_2, \cdots, v_N\}$也与$\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$成对偶关系，那么

$$\langle x_i \mid y_j\rangle=\delta_{ij},\quad i,j,=1,2,\cdots,N$$

同时

$$\langle x_i \mid v_j\rangle=\delta_{ij},\quad i,j,=1,2,\cdots,N$$

从而

$$\langle x_i \mid (y_j-v_j)\rangle=\langle x_i \mid y_j\rangle-\langle x_i \mid v_j\rangle$$

$$=0,\quad i,j,=1,2,\cdots,N$$

因此，对所有 j，$y_j=v_j$.

例 3.7 给定 $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 如下：

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

它们线性无关，构成 R^3 的基. 求 α 的对偶集合 $\beta=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. 这里，使用 $n\times 1$ 阶向量的常规内积 $\langle x \mid y\rangle = x'y$.

解 求对偶集的方法是先应用式(3-5)，然后进行大量的代数运算. 这个过程的很多步骤可以简化. 考虑到 α 是基，$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 可以用 $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 来表示.

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \tag{3-6a}$$

$$\beta_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 \tag{3-6b}$$

$$\beta_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \tag{3-6c}$$

为了求第一个方程的 a_i，将它与 α_i 作内积，$i=1, 2, 3$.

$$\langle \alpha_1 \mid \beta_1\rangle = a_1\langle \alpha_1 \mid \alpha_1\rangle + a_2\langle \alpha_1 \mid \alpha_2\rangle + a_3\langle \alpha_1 \mid \alpha_3\rangle \tag{3-7a}$$

57

$$\langle \alpha_2 \mid \beta_1\rangle = a_1\langle \alpha_2 \mid \alpha_1\rangle + a_2\langle \alpha_2 \mid \alpha_2\rangle + a_3\langle \alpha_2 \mid \alpha_3\rangle \tag{3-7b}$$

$$\langle \alpha_3 \mid \beta_1\rangle = a_1\langle \alpha_3 \mid \alpha_1\rangle + a_2\langle \alpha_3 \mid \alpha_2\rangle + a_3\langle \alpha_3 \mid \alpha_3\rangle \tag{3-7c}$$

式(3-7a)～式(3-7c)右边各内积的数值为

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha_1 \mid \alpha_1\rangle = 1 \quad \langle \alpha_1 \mid \alpha_2\rangle = 1 \quad \langle \alpha_1 \mid \alpha_3\rangle = 1\\
&\langle \alpha_2 \mid \alpha_1\rangle = 1 \quad \langle \alpha_2 \mid \alpha_2\rangle = 2 \quad \langle \alpha_2 \mid \alpha_3\rangle = 2\\
&\langle \alpha_3 \mid \alpha_1\rangle = 1 \quad \langle \alpha_3 \mid \alpha_2\rangle = 2 \quad \langle \alpha_3 \mid \alpha_3\rangle = 3
\end{aligned} \tag{3-8}$$

将它们代入式(3-7a)～式(3-7c)并应用式(3-5)，有

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle \alpha_1 \mid \beta_1\rangle\\\langle \alpha_2 \mid \beta_1\rangle\\\langle \alpha_3 \mid \beta_1\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3-9}$$

解这个方程，得

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} \tag{3-10}$$

因此

$$\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-11}$$

即求得三个对偶向量中的第一个．重复以上过程即可求得β_2和β_3．然而，注意到这些步骤是相同的，因此可以将这个过程统一起来．考虑式(3-6b)的系数b_1，b_2，b_3的计算，易知，式(3-7)右边的内积是不变的，也即式(3-8)表示的矩阵不变，称之为矩阵M．因此式(3-9)中的矩阵M为

58

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 和 \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

唯一不同的地方是式(3-7)左边的β_1换成了β_2．因此，我们可以给出式(3-9)和式(3-10)的一般形式为

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \langle \alpha_1 \mid \beta_1 \rangle \\ \langle \alpha_2 \mid \beta_1 \rangle \\ \langle \alpha_3 \mid \beta_1 \rangle \end{bmatrix} \tag{3-12a}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \langle \alpha_1 \mid \beta_2 \rangle \\ \langle \alpha_2 \mid \beta_2 \rangle \\ \langle \alpha_3 \mid \beta_2 \rangle \end{bmatrix} \tag{3-12b}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \langle \alpha_1 \mid \beta_3 \rangle \\ \langle \alpha_2 \mid \beta_3 \rangle \\ \langle \alpha_3 \mid \beta_3 \rangle \end{bmatrix} \tag{3-12c}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} \langle \alpha_1 \mid \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1 \mid \alpha_2 \rangle & \langle \alpha_1 \mid \alpha_3 \rangle \\ \langle \alpha_2 \mid \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_2 \mid \alpha_2 \rangle & \langle \alpha_2 \mid \alpha_3 \rangle \\ \langle \alpha_3 \mid \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_3 \mid \alpha_2 \rangle & \langle \alpha_3 \mid \alpha_3 \rangle \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

代入数值至式(3-12b)进行计算，得

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

59

所以

$$\beta_2=-\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

类似地，

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

所以

$$\beta_3=-\alpha_2+\alpha_3=-\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

因此，对偶基为

$$\beta=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

■

要求式(3-6)的对偶基，只要解式(3-12)和式(3-13)以求取 a_i，b_i 和 c_i，然后再将它们代入式(3-6)即可.

值得注意的是基$\{\alpha_i\}$不是正交基. 假如它是正交基，则 M 是单位矩阵，这样，α 和 β 将相等. 为了说明这一点，我们将式(3-12)合成一个方程：

$$\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=M^{-1}\begin{bmatrix}\langle\alpha_1\mid\beta_1\rangle&\langle\alpha_1\mid\beta_2\rangle&\langle\alpha_1\mid\beta_3\rangle\\\langle\alpha_2\mid\beta_1\rangle&\langle\alpha_2\mid\beta_2\rangle&\langle\alpha_2\mid\beta_3\rangle\\\langle\alpha_3\mid\beta_1\rangle&\langle\alpha_3\mid\beta_2\rangle&\langle\alpha_3\mid\beta_3\rangle\end{bmatrix}\tag{3-14}$$

因为正交，所以 M 是单位矩阵. 将上式右边的矩阵与式(3-5)比较，不难发现，它也是单位矩阵，因此上式左边的矩阵也是单位矩阵. 这就是说 $a_1=b_2=c_3=1$，而其他项都是 0. 由式(3-6)，得到 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$.

60

仔细观察式(3-14)，根据定义，不管 M 是什么，其右边的矩阵都是单位矩阵. 因此，其左边的系数矩阵为 M^{-1}，也就是

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\tag{3-15}$$

上式为我们求已知基 α 的对偶基 β 提供了一个简便的方法，即

$$\beta=(M^{-1})^t\alpha\tag{3-16}$$

其中，M 由式(3-13)定义.

例 3.8 设 $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2\}$是 R^2 的基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

求与 α 对偶的基 $\beta=\{\beta_1, \beta_2\}$.

解 α 为正交基，但不规范，即基向量的长度不为 1. 计算 M，有

$$M=\begin{bmatrix}\langle\alpha_1 \mid \alpha_1\rangle & \langle\alpha_1 \mid \alpha_2\rangle\\ \langle\alpha_2 \mid \alpha_1\rangle & \langle\alpha_2 \mid \alpha_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

于是

$$A=M^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}$$

因此

$$\beta=(M^{-1})^t\alpha=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$$

61 即有

$$\beta_1=\frac{1}{2}\alpha_1=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}\alpha_2=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

从这个例子我们可以得到以下结论：若 α 为正交基，则 β 也是正交基，二者呈线性关系；若 α 同时还是规范的，则二者相等. ■

例 3.9 我们看另外一个向量空间的例子. 令 P_1 是由所有次数不高于 1 的多项式组成的集合，定义内积为

$$\langle p_1 \mid p_2\rangle=\int_0^1 p_1(t)p_2(t)\mathrm{d}t$$

求 $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2\}=\{1, 1+t\}$的对偶基.

解 先求矩阵 M，有

$$M=\begin{bmatrix}\langle\alpha_1 \mid \alpha_1\rangle & \langle\alpha_1 \mid \alpha_2\rangle\\ \langle\alpha_2 \mid \alpha_1\rangle & \langle\alpha_2 \mid \alpha_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3/2\\3/2 & 7/3\end{bmatrix}$$

得

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}28 & -18\\ -18 & 12\end{bmatrix}$$

因此

$$\beta_1=28\alpha_1-18\alpha_2=28-18(1+t)=10-18t$$

$$\beta_2=-18\alpha_1+12\alpha_2=-18+12(1+t)=-6+12t$$

■

练习 3.4 将例 3.9 中的内积改为$\langle p_1 \mid p_2\rangle=\int_0^2 p_1(t)p_2(t)\mathrm{d}t$,求 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}=\{1,1+t\}$ 的对偶基.

答案: $\beta=\{\beta_1,\beta_2\}=\{3.5-3t,-1.5+1.5t\}$.

62

例 3.10 设 V 是由所有长度为 4 的离散时间波形构成的集合，图 3-2 所示的$\{\alpha_i\}$是 V 的一组基，求它的对偶基.

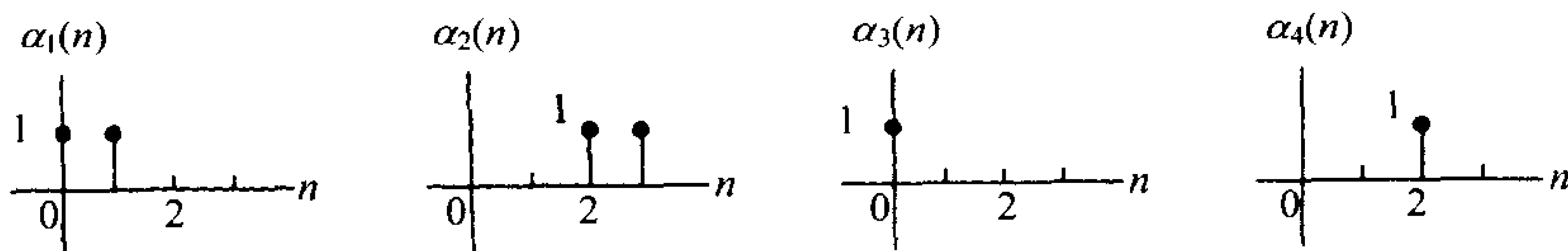


图 3-2 基 α

解 采用常规内积

$$\langle\alpha_i \mid \alpha_j\rangle=\sum_{n=0}^{3}\alpha_i(n)\alpha_j(n)$$

于是，矩阵 M 为

$$M=[\langle\alpha_i \mid \alpha_j\rangle]=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由式(3-13)，对偶基 β 为

$$\beta=(M^{-1})'\alpha=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1(n)\\ \alpha_2(n)\\ \alpha_3(n)\\ \alpha_4(n)\end{bmatrix}$$

从而

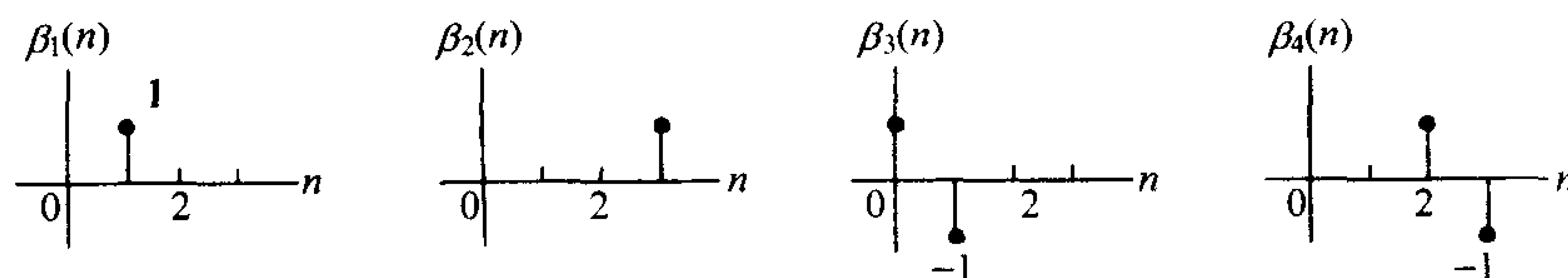
$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_3 = (1,1,0,0) - (1,0,0,0) = (0,1,0,0)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_4 = (0,0,1,1) - (0,0,1,0) = (0,0,0,1)$$

$$\beta_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_3 = -(1,1,0,0) + 2(1,0,0,0) = (1,-1,0,0)$$

$$\beta_4 = -\alpha_2 + 2\alpha_4 = -(0,0,1,1) + 2(0,0,1,0) = (0,0,1,-1)$$

63 图 3-3 给出了对偶基的图示.



64 图 3-3 对偶基 β ■

第4章 线性变换

我们通常使用正交基来对向量进行操作. 这样做的好处是可以在相当程度上简化代数运算. 本章将引入一些更复杂的基，以阐明一些在正交基下不太清楚的概念. 我们将证明向量的坐标是依赖于基的，并将给出一些求向量在不同向量空间中坐标的例子.

本章重点讨论两个有限维向量空间之间的线性函数(线性变换). 将变换直接应用到定义域的元素上等价于用变换矩阵对坐标向量进行运算，其结果是一样的. 在此过程中，我们将发现矩阵不仅仅是一个矩形数组，而是包含有更多的东西. 事实上，矩阵是两个有限维向量空间之间的线性变换的一种表示.

本章目标 **读完本章以后，读者应该掌握：**

- 对给定的基，用坐标表示任意向量.
- 对给定的线性变换以及定义域和因变域的基，确定变换矩阵.

4.1 向量的分量

对于向量空间 V，一旦选定了基，那么 V 中的任何向量就都可以用基的分量形式来表示. 设 $v\in V$，$\beta=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$是一组有序基(基中各分量是有顺序的，例如$\{\beta_3, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$不同于$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$)，那么由基的定义，$v$ 可以唯一地表示为

$$v = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n \tag{4-1}$$

$n\times 1$ 的矩阵

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

就是 v 关于基 β 的坐标.

例 4.1 设 P_3 是由所有次数不高于 3 的多项式组成的集合，下列多项式属于 P_3：

$$p_1(x) = 5 - x + 2x^2 + 3x^3$$

$$p_2(x) = -1 + x^2$$

$$p_3(x) = 3 + 2x$$

选取 $\beta=\{1, x, x^2, x^3\}$作为 P_3 的基，则这些向量关于 β 的坐标为

$$[p_1(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [p_2(x)]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [p_3(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意，坐标的顺序由基向量的顺序决定．就是说，假如把基的顺序倒过来，即基为 $\alpha=\{x^3, x^2, x, 1\}$，则这些向量的坐标将是

$$[p_1(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad [p_2(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [p_3(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

■

例 4.2　设 $\gamma=\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$是例 4.1 中 P_3 的一组基，其中

66

$$\gamma_1 = 1$$

$$\gamma_2 = 1 + x$$

$$\gamma_3 = 1 + x + x^2$$

$$\gamma_4 = 1 + x + x^2 + x^3$$

求例 4.1 中 3 个向量关于 γ 的坐标.

解　为了求 $p_1(x)$的坐标，利用式(4-1)有

$$p_1 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + a_4\gamma_4$$

即

$$\begin{aligned} 5 - x + 2x^2 + 3x^3 &= a_1(1) + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2) + a_4(1 + x + x^2 + x^3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_2 + a_3 + a_4)x + (a_3 + a_4)x^2 + a_4x^3 \end{aligned}$$

令方程两边对应系数相等，得

$$\begin{aligned} a_4 &= 3 \\ a_3 &= -1 \\ a_2 &= -3 \\ a_1 &= 6 \end{aligned} \qquad 所以 \qquad [p_1(x)]_\gamma = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

■

练习 4.1 求例 4.1 中 p_2 和 p_3 关于基 γ 的坐标.

答案： $[p_2(x)]_\gamma=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$[p_3(x)]_\gamma=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$.

例 4.3 设 V 是由定义在复数域上的所有 2×2 阶矩阵构成的集合，矩阵

$$v_1=\begin{bmatrix}1+j & 0\\ -1 & 1-j\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\quad v_3=\begin{bmatrix}-j & 1-j2\\ j & 0\end{bmatrix}$$

67

属于该向量空间. 选择基为

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \beta_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \beta_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\quad \beta_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

求 v_1 的坐标.

解 由式(4-1)，我们有

$$\begin{bmatrix}1+j & 0\\ -1 & 1-j\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned}a_1&=1+j\\ a_2&=0\\ a_3&=-1\\ a_4&=1-j\end{aligned}\qquad 即\quad [v_1]_\beta=\begin{bmatrix}1+j\\0\\-1\\1-j\end{bmatrix}$$

■

练习 4.2 求例 4.3 中的 v_2 和 v_3 关于基 β 的坐标.

答案： $[v_2]_\beta=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\0\end{bmatrix}$，$[v_3]_\beta=\begin{bmatrix}-j\\1-j2\\j\\0\end{bmatrix}$.

例 4.4 将例 4.3 中的基改为如下的基 γ：

$$\gamma_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\quad\gamma_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\quad\gamma_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\quad\gamma_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

求 v_1 在基 γ 下的坐标.

68

解 由式(4-1)，我们有

$$\begin{bmatrix}1+\mathrm{j}&0\\-1&1-\mathrm{j}\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

令方程两边对应系数相等，得

$$\begin{aligned}1+\mathrm{j}&=a_1+a_2+a_3+a_4\\0&=a_2+a_3+a_4\\-1&=a_3+a_4\\1-\mathrm{j}&=a_4\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}a_4&=1-\mathrm{j}\\a_3&=-2+\mathrm{j}\\a_2&=1\\a_1&=1+\mathrm{j}\end{aligned}\qquad\text{所以}\quad[v_1]_\gamma=\begin{bmatrix}1+\mathrm{j}\\1\\-2+\mathrm{j}\\1-\mathrm{j}\end{bmatrix}$$

■

练习 4.3 求例 4.3 中的 v_2 和 v_3 关于 γ 的坐标.

答案： $[v_2]_\gamma=\begin{bmatrix}3\\-4\\3\\0\end{bmatrix}$，$[v_3]_\gamma=\begin{bmatrix}-1+\mathrm{j}\\1-\mathrm{j}3\\\mathrm{j}\\0\end{bmatrix}$.

4.2 矩阵

矩阵是两个有限维向量空间之间线性变换的一种表示. 我们将其表述为下面的定义.

定义 4.1 矩阵是两个有限维向量空间之间线性变换的一种表示.

这个定义的含义是什么？首先，它意味着矩阵不仅仅是一个矩形数组，而是

包含有更多的东西. 设 $f: X \to Y$ 是一个线性变换，X 和 Y 均为有限维的向量空间. 一旦确定了定义域和值域的基，向量 $x \in X$ 就可以用它的坐标矩阵 $[x]_\alpha$ 来表示. 经过变换 f 后，得到的向量 $y \in Y$ 也可以用它的坐标矩阵 $[y]_\beta$ 来表示. 这样我们就得到了两个列矩阵 69

$$[x]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad [y]_\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

它们通过函数 f 彼此关联. 这样一来，自然会存在一个 $m \times n$ 的矩阵 A，我们称之为**变换矩阵**(matrix of transformation)，使得

$$[y]_\beta = A[x]_\alpha \tag{4-2}$$

这表明，对于 $x \in X$ 我们可以有两种方法去执行函数 f 的运算

1. $f: X \to Y: x \mapsto f(x)$
2. $A: [x]_\alpha \to [y]_\beta: [x]_\alpha \mapsto A[x]_\alpha$

第一种方法是直接对 x 施加函数 f 运算求 y. 第二种方法是间接方法. 对给定的 x，先求 $[x]_\alpha$，再将它与变换矩阵相乘得到 $[y]_\beta$，然后用基 β 将 $[y]_\beta$ 展开表示为 y. 图 4-1 给出了这两种平行方法的图示.

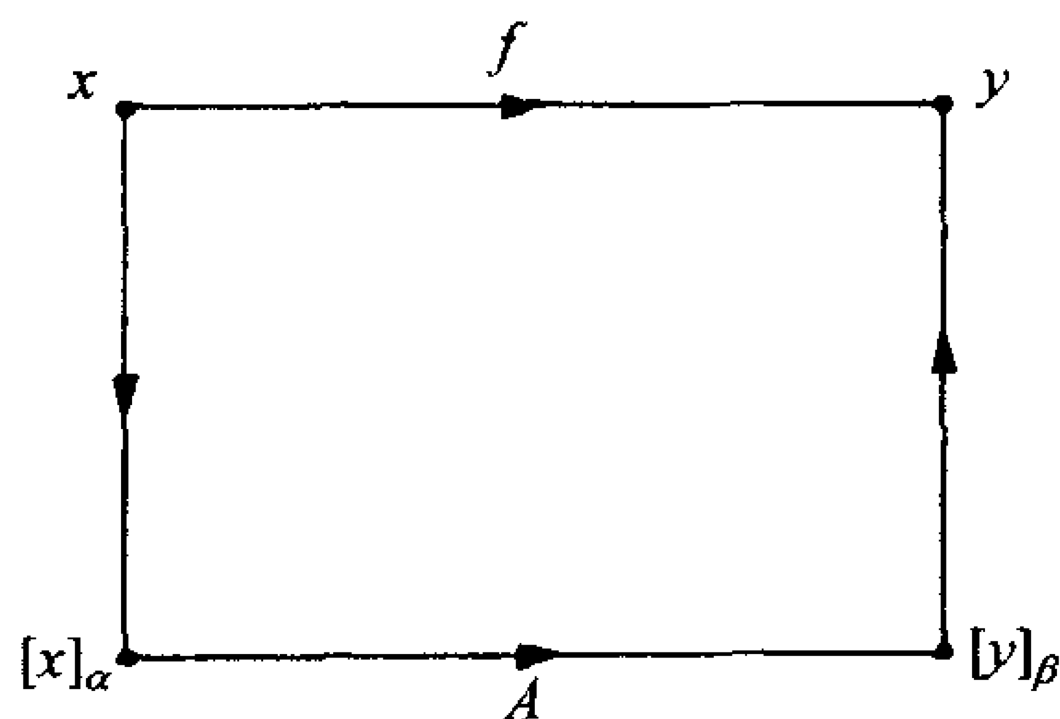


图 4-1 执行函数运算的两种平行方法

矩阵 A 只依赖于函数 f 和基 α，β. 求变换矩阵的算法可归结如下：

1. 对每一个基向量 α_i 执行函数运算得到 $y_i = f(\alpha_i)$.
2. 求 $[y_i]_\beta$，即 y_i 关于值域空间基 β 的坐标. 70
3. 由列向量 $[y_i]_\beta$ 组成变换矩阵. 即

$$A = [[y_1]_\beta [y_2]_\beta \cdots [y_n]_\beta] \tag{4-3}$$

例 4.5 设 $f: P_2 \to P_3: p(x) \mapsto xp(x)$. 即 f 是这样一个函数，它将 $p(x) \in P_2$ 乘以 x 得到 $y = xp(x)$. 例如，若 $p(x) = 1 + 2x + x^2$，则 $y = xp(x) = x + 2x^2 + x^3$（可以证明这个变换是线性的）. 选择基为 $\alpha = \{1, x, x^2\}$，$\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(a)求变换矩阵.

(b)说明对 $p(x)$执行函数 f 运算等价于用矩阵 A 作用到它的分向量上.

解 (a)对每一个基向量 $\alpha_i \in P_2$ 执行函数 f 运算

$$x \times 1 = x$$

$$x \times x = x^2$$

$$x \times x^2 = x^3$$

将得到的结果表示为关于基 β 的坐标

$$x = a_1 \times 1 + a_2 \times x + a_3 \times x^2 + a_4 \times x^3 \quad 即 \quad [x]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = a_1 \times 1 + a_2 \times x + a_3 \times x^2 + a_4 \times x^3 \quad 即 \quad [x^2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = a_1 \times 1 + a_2 \times x + a_3 \times x^2 + a_4 \times x^3 \quad 即 \quad [x^3]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将每一个坐标向量作为 A 的一列，组成如下的变换矩阵 A.

[71]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)首先求分向量$[p]_\alpha$，将 $p(x)$写成

$$p(x) = 1 + 2x + x^2 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

从而

$$[p(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$A[p(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [xp(x)]_\beta$$

因此

$$xp(x) = 0(\beta_1) + 1(\beta_2) + 2(\beta_3) + 1(\beta_4) = x + 2x^2 + x^3$$ ■

练习 4.4 若例 4.5 中的 $p(x)=2x^2-x+3$，则

$$y = xp(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$$

求$[p(x)]_\alpha$，然后用矩阵 A 乘以$[p(x)]_\alpha$，求出$[y]_\beta$，并说明其结果就是 y.

练习 4.5 将例 4.5 中定义域的基改为

$$\alpha = \{1, x, 1+x^2\}$$

基 β 保持不变，求变换矩阵. 72

答案： $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

例 4.6 设 $f: P_3 \to P_2 : p(x) \mapsto \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$，选择基为 $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}, \beta = \{1, x, x^2\}$.

(a)求变换矩阵.

(b)用两种方法求 $p(x)=10+3x-2x^2+x^3$ 的导数.

解 (a)对定义域的每个基向量作函数运算，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 3x^2$$

将每一结果用基 β 的坐标表示. 显然，0 的坐标是 0. 其他向量的坐标为

$$1 = a_1 \times 1 + a_2 \times x + a_3 \times x^2 \quad 即 \quad [1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

73

$$2x = a_1(1) + a_2(x) + a_3(x^2) \quad 即 \quad [2x]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x^2 = a_1(1) + a_2(x) + a_3(x^2) \quad 即 \quad [3x^2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

将每一个坐标向量作为 A 的一列，组成变换矩阵 A 如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)求分向量$[p(x)]_\alpha$. 因为

$$p(x) = 10 + 3x - 2x^2 + x^3 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

即

$$[p(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

左乘矩阵 A，得

$$A[p(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(x) = 3(\beta_1) - 4(\beta_2) + 3(\beta_3) = 3 - 4x + 3x^2$$

■

练习 4.6 设例 4.6 中的 $p(x) = 2x^2 - x + 3$，则

$$y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x) = 4x - 1$$

求$[p(x)]_\alpha$，然后将$[p(x)]_\alpha$左乘以矩阵A求$[y]_\beta$，并说明其结果就是y.　[74]

例 4.7　设V是由复数域上所有2×2阶矩阵组成的集合，$v=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$.

变换f: $V\to V$为

$$f(v)=\begin{bmatrix} v_{11}-v_{12} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{22}-v_{21} \end{bmatrix}$$

选择定义域和值域上的基均为

$$\beta_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad \beta_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad \beta_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\quad \beta_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求变换矩阵.

解　将f作用到定义域的每一个基向量上.

$$f(\beta_1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\qquad f(\beta_2)=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\beta_3)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\quad f(\beta_4)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求它们关于值域基的坐标向量.

$$[f(\beta_1)]_\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\qquad [f(\beta_2)]_\beta=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[f(\beta_3)]_\beta=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\quad [f(\beta_4)]_\beta=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此　[75]

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

■

练习 4.7　在例 4.7 中，设

$$v_1=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

(a)将 f 作用到 v_1 上直接求 y.

(b)求$[f(v_1)]_\beta$，然后将$[f(v_1)]_\beta$ 左乘以矩阵 A 求$[y]_\beta$，并说明其结果就是 y.

练习 4.8　设 $f:P_2\to P_3:p(x)\mapsto\int_0^x p(\lambda)\mathrm{d}\lambda$. 选择基为 $\alpha=\{1,x,x^2\}$,$\beta=\{1,x,x^2,x^3\}$. 求变换矩阵.

答案: $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

例 4.8　一个 LTI 系统将输入信号 $v(n)$作线性运算得到输出信号 $y(n)$. 线性运算是可以使用变换矩阵的三个必要条件之一. 另外两个必要条件是定义域(输入信号集合)为有限维，值域(输出信号集合)为有限维. 设一个离散时间 LTI 系统的冲击响应为 $h(n)=\{1,\ 1,\ 1\}$，输入信号的长度为 4，也就是说输入向量空间的维数为 4，输出向量空间的维数为 6.

(a)求变换矩阵.

(b)使用矩阵相乘求输入信号 $v_1(n)=\{1,\ 3,\ -1,\ 1\}$的响应.

(c)变换矩阵是否适用于复值信号？就是说，能否使用矩阵相乘求 $v_2(n)=\{1,\ 2+\mathrm{j}1,\ 0,\ 1-\mathrm{j}1\}$的响应？

76

解　(a) 设 V 是由所有长度为 4 的复值输入序列构成的集合,Y 是由所有长度为 6 的复值输出序列构成的集合. f 是系统施加在输入信号上的运算，表示为 $f:V\to Y:v(n)\mapsto h(n)*v(n)=y(n)$,其中卷积运算的定义为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{3}v(k)h(n-k)$$

显然，选择定义域空间和因变域空间的基均为正交基是明智的. 因此，设定义域空间和值域空间的基 α 和 β 分别是

$$\alpha=\{(1000)(0100)(0010)(0001)\}$$

$$\beta = \{(100000)(010000)(001000)(000100)(000010)(000001)\}$$

(a)为了求 A，将运算作用在基向量 α 上.

$$h * \alpha_1 = (111000) \Rightarrow [h * \alpha_1]_\beta = [111000]'$$

$$h * \alpha_2 = (011100) \Rightarrow [h * \alpha_2]_\beta = [011100]'$$

$$h * \alpha_3 = (001110) \Rightarrow [h * \alpha_3]_\beta = [001110]'$$

$$h * \alpha_4 = (000111) \Rightarrow [h * \alpha_4]_\beta = [000111]'$$

将上式右边的每一个向量作为 A 的一列，得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

需要说明的是，基向量的特殊性可能会使过程中的某些步骤被掩盖掉. 例如，输出信号 $h * \alpha_1 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$和分向量$[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]'$具有相同的形式，但是将输出信号转变为分向量的过程并不是对每个基来说都是这么简单的. [77]

(b)$v_1(n) = (1,\ 3,\ -1,\ 1)$与 $h(n) = (1,\ 1,\ 1)$作卷积的结果是 $y(n) = (1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 0,\ 1)$. 为了通过矩阵相乘得到这个结果，首先求 v_1 关于基的分向量，得到一个 4×1 的矩阵$[v_1]_\alpha = [1\ 3 -1\ 1]'$. 将其与 A 相乘，得

$$A[v_1]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上式为输出序列 $y(n)$关于值域基的分量.

(c)变换矩阵同样适用于复值信号. 对于 $v_2(n) = \{1,\ 2+\mathrm{j}1,\ 0,\ 1-\mathrm{j}1\}$，有

$$A[v_2]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{j}1 \\ 0 \\ 1-\mathrm{j}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{j}2 \\ 2+\mathrm{j}2 \\ 3 \\ 1-\mathrm{j}1 \\ 1-\mathrm{j}1 \end{bmatrix}$$

其输出信号为 $y(n)=\{1\ 2+j2\ 2+j2\ 3\ 1-j1\ 1-j1\}$. ■

练习 4.9 设例 4.8 中的系统冲击响应为 $h(n)=\{1,\ 1,\ -1\}$，求变换矩阵.

答案：$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

78

练习 4.10 设 P_n 是由所有次数不高于 n 的多项式组成的集合，$\alpha=\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n\}$是它的基. 设线性变换 f：$P_2 \to P_3$ 的变换矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 f 作用在 $p(x)=3-x+2x^2$ 上的响应.

答案：$f[p(x)]=3+2x+x^2+2x^3$.

79

第5章 采样定理

在信号处理中，采样定理是最重要的定理之一．它建立起了连续时间信号与离散时间信号之间的桥梁．采样定理说明只要采样间隔足够小，那么连续时间信号就可以由它的采样精确恢复．“精确”一词正是这个定理的美妙之处．直观地看，随着采样越来越密，采样信号与原信号之间的误差将越来越小．因此，当采样个数趋向无穷大时，这个误差将趋向于0．然而，实际情况并非如此．采样定理建立了一个被称为最小采样率(minimum sampling rate)的阈值，只要采样率大于这个阈值，就能够由采样完全恢复原信号．

当然，世上没有免费的晚餐．采样定理要求连续时间信号必须是带限(带宽受限)的，这意味着连续时间信号的变化不能太快．因为信号变化加快，其带宽就会增加，其采样率也必须增加．信号的带宽决定了最小采样率．

本章目标 **读完本章以后，读者应该掌握：**

- 对给定带宽的信号，确定其奈奎斯特采样率．
- 确定一个给定采样率的抗混叠滤波器的带宽．
- 手工将一个采样信号转换为 PCM 信号．
- 计算一个均匀量化信号的量化噪声功率．

5.1 奈奎斯特采样率

采样是一种数学运算，它是将信号 $v(t)$ 与一个冲击序列相乘，如图 5-1 所示．乘积 $v(t)p(t)$ 就是采样信号 $v_s(t)$．

$$v_s(t) = v(t)p(t) \tag{5-1}$$

时间域的乘积对应于频域的卷积，即

$$V_s(\omega) = V(\omega) * P(\omega) \tag{5-2}$$

为了便于求冲击序列的谱 $P(\omega)$，我们把 $p(t)$ 写成冲击函数之和的形式．

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

注意，该冲击序列的周期设为 T．

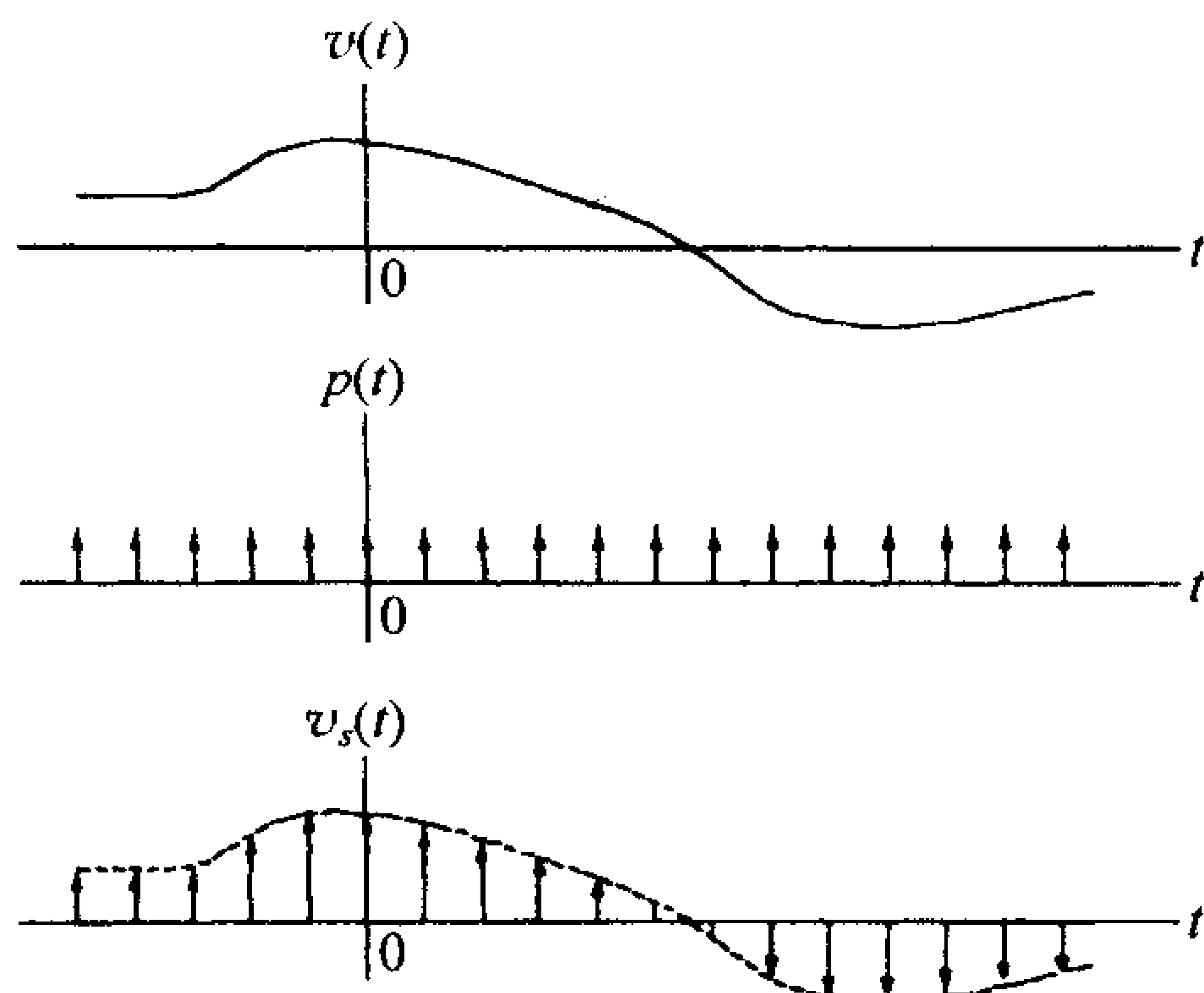


图 5-1 函数 $v(t)$，$p(t)$及采样信号 $v_s(t)$

求 $p(t)$的傅里叶变换的方法有多种，其中最有意思的一种是先将 $p(t)$表示为另外一种形式，即写成傅里叶级数. 连续时间功率信号 $p(t)$的傅里叶级数的系数为

$$P_k = \frac{1}{T}\int_{t'}^{t'+T} p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

其中 t'表示初始时间，T 为信号的周期. 当 $t'=-T/2$ 时，因为在积分区间内

81

$p(t)=\delta(t)$，所以 $P_k=1/T$. 因此，$p(t)$的傅里叶级数为

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kt/T} \tag{5-3}$$

上面两个公式中的 $\omega_1=2\pi/T$. 由傅里叶变换的调制性质 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$和式(5-3)，得到冲击序列的傅里叶变换为

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \tag{5-4}$$

因此，周期冲击序列 $p(t)$的傅里叶变换是频域的一个周期冲击序列. 当谱 $P(\omega)$中的 ω 以每秒弧度为单位时，脉冲面积为 $2\pi/T$，脉冲间隔为 $\omega_s=2\pi/T$ 弧度/每秒. 当谱用 $P(f)$表示，f 以赫兹为单位时，脉冲面积为 $1/T$，脉冲间隔为 $f_s=1/T$ 赫兹.

由于 $v_s(t)$是 $v(t)p(t)$的乘积，所以它的傅里叶变换 $V_s(\omega)$是 $V(\omega)$与 $P(\omega)$的卷积. 图 5-2 是两个信号在频域作卷积的示意图. 设任意形状的谱 $V(\omega)$与 $P(\omega)$作卷积后得到 $V_s(\omega)$. 又假设 $V(\omega)$的最高频率为 ω_m，图 5-2c 表明当 $\omega_s>2\omega_m$时，$V_s(\omega)$的相邻分量之间不存在交叠. 在这种情况下，我们可以通过一个低通滤波器(如图 5-2c 的虚线所示)将原信号 $v(t)$完全恢复出来. 这也是原信号可以

由采样信号完全恢复的必要条件．这个最小采样率 $2\omega_m$ 被称为奈奎斯特采样率(Nyquist rate)．

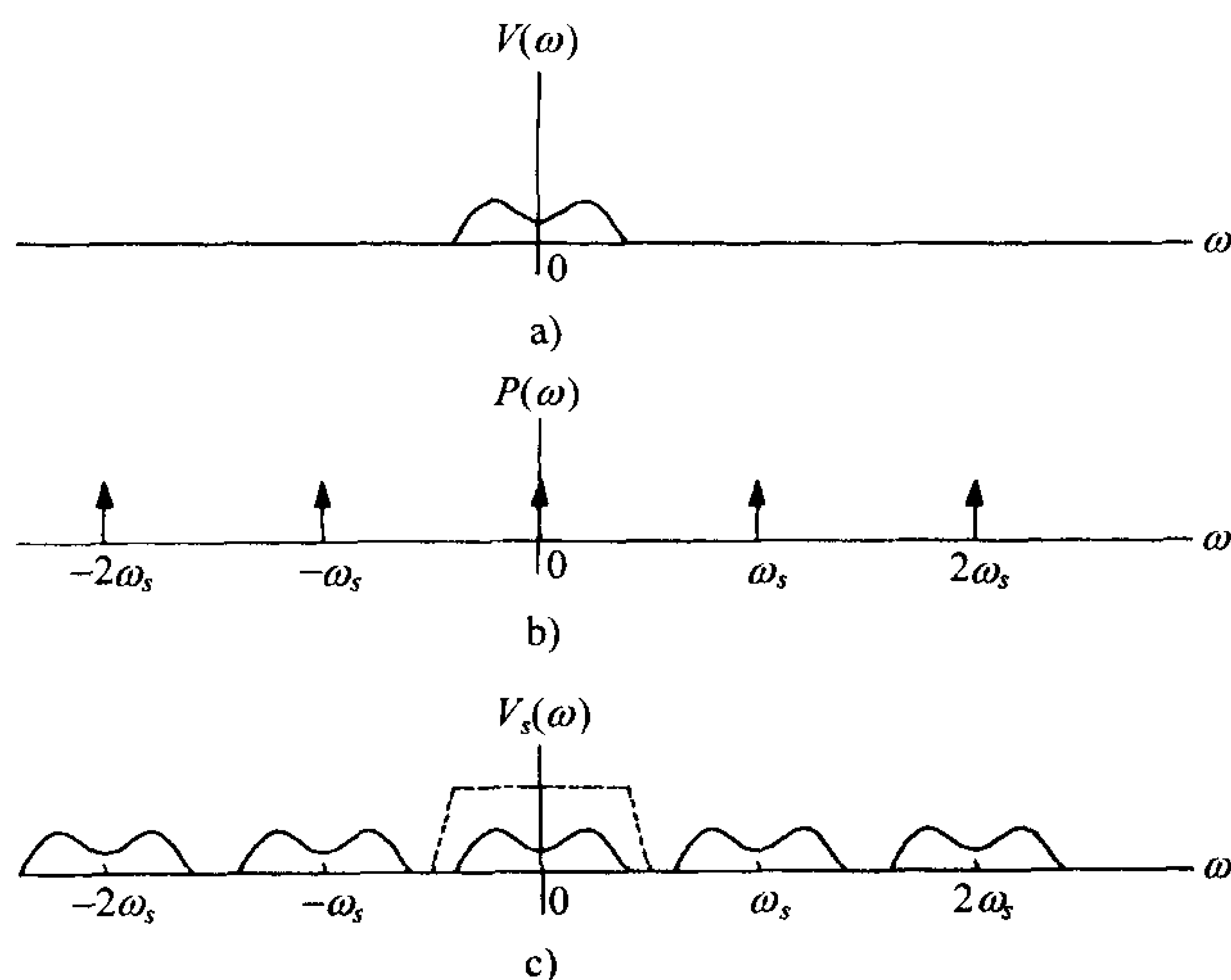


图 5-2　$V(\omega)$与 $P(\omega)$作卷积

图 5-3 给出了采样间距太远，即 $\omega_s < 2\omega_m$ 的情形．此时，频率分量出现交叠，导致频率之间互相干扰．这种情况被称为混叠(aliasing)，它是由于采样频率低于奈奎斯特采样率而导致的结果．

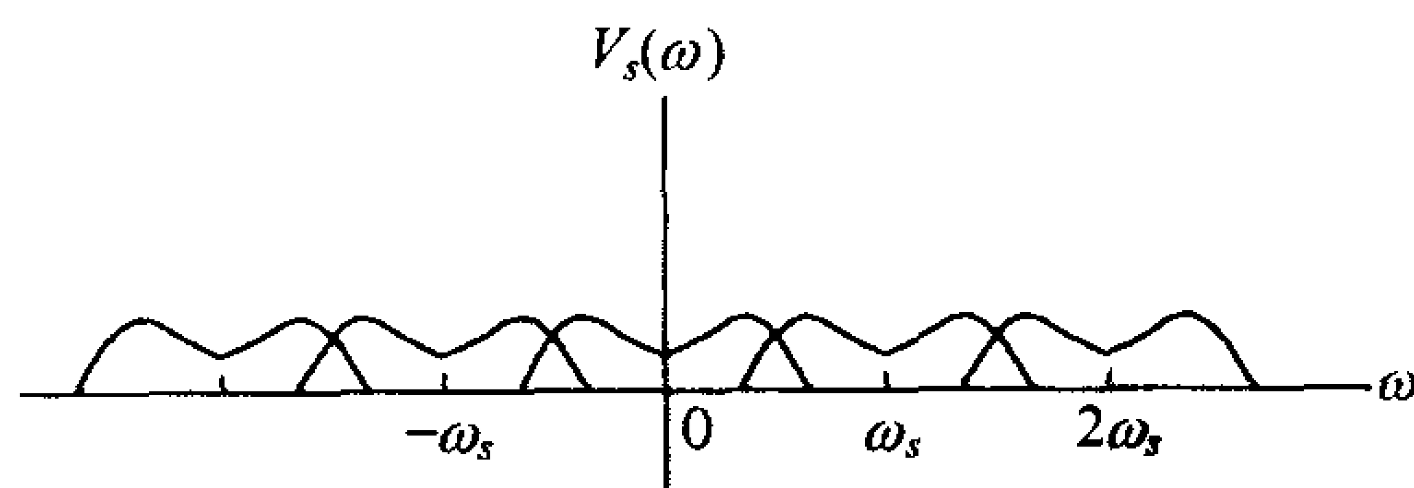


图 5-3　当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时的谱

值得注意的是经过采样以后，信号 $v(n)$变成了离散时间信号．事实上，采样的目的就是为了能够用数列来表示信号．因此，谱是离散频率的函数，是以 2π 为周期的．这意味着我们可以将图 5-2 中的 $V_s(\omega)$替换为 $V_s(\Omega)$，这样，图 5-2 中的 ω_s 的值就对应到 2π．现在我们考察这样做之后是否与原先的结果一致．

首先，我们给定频率变量和采样率的单位如下：

ω(弧度 / 秒)

Ω(弧度 / 每个采样单位)

r_s(采样数 / 秒)

为了保证单位统一，它们必须满足以下关系：

ω(弧度 / 秒) = Ω(弧度 / 每个采样单位) × r_s(采样数 / 秒)

因为 $\omega_s = 2\pi/T = 2\pi r_s$，所以，事实上有 $\Omega_s = \omega_s/r_s = 2\pi$．因此，有如图 5-4 所示

82 ~ 83

的离散时间信号的谱.

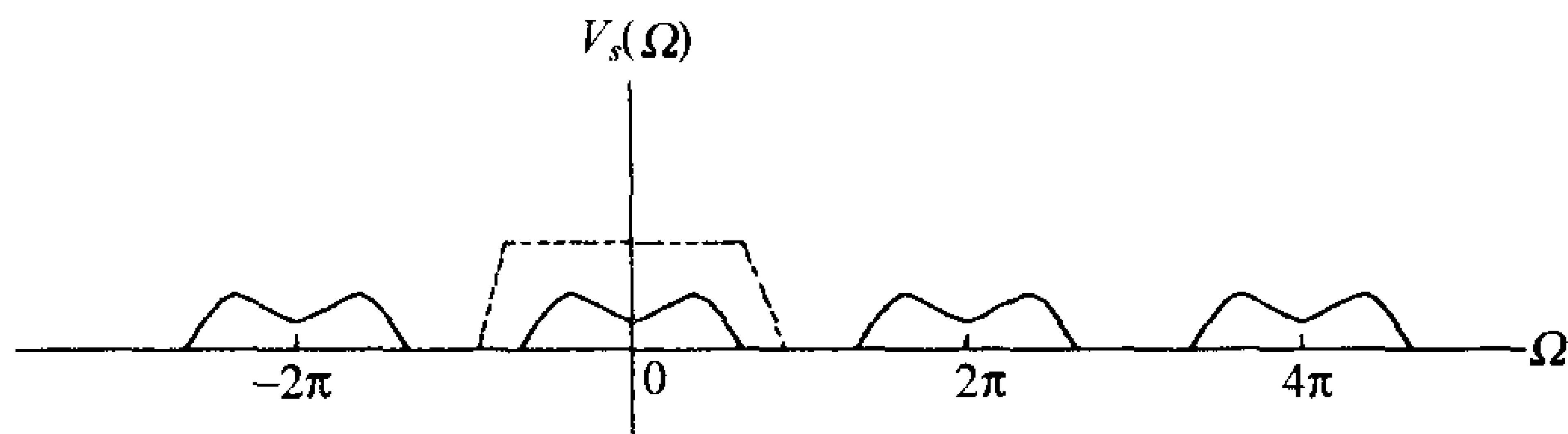


图 5-4 离散时间信号的谱

例 5.1 确定下列信号的最小采样率.

(a)一个带宽为 8 kHz 的音频信号.

(b)正弦信号 $v(t)=10\sin(2\pi 20t)$.

(c)一个带宽为 10 kHz 的带限信号与白噪声(具有无限带宽)的混合信号.

解 (a)$2f_m=16$ kHz.

(b)正弦信号的频率为 20 Hz，所以，采样率应至少为 40 个采样单位/秒.

(c)该信号的最小采样率为 20 kHz. 因为，无论采样率为多大，采样值都由信号和噪声组成. 噪声是不影响最小采样率的. 因此，最小采样率为 $f_s \geqslant 20$ kHz.

■

练习 5.1 设当采样频率 $\omega_s=5\pi(10)^5$ 时，未知信号 $w(t)$可以由它的采样唯一确定. 当 ω 为多少时，$W(\omega)$为 0?

答案：$|\omega|>2.5\pi(10)^5$.

例 5.2 一个由声音和音乐组成的信号需要以 10 kHz 的采样率进行采样. 为了避免频率混叠，采样之前要对信号进行低通滤波，问滤波器的最大带宽应为多少?

解 在本问题中，采样率是固定的，因此要限制信号的带宽以避免产生混叠. 为了达到这个目的，用于滤波的低通滤波器的带宽应足够小，以避免在采样率为 10 kHz 时产生混叠.

84

图 5-5a 是一个带宽为 5 kHz 的信号的谱，它是以奈奎斯特采样率 10 kHz 采样获得的. 带宽为 $f_c=5$ kHz 的理想滤波器正好适合对它进行滤波. 但是，实际滤波器不会出现这里所需要的峰变过渡带. 所以在实际应用中，必须使谱分量之间存在一些间隙，如图 5-5b 所示，以便实际的滤波器可以有一个实现频率分离的过渡带. 所以，实际采样率应取为奈奎斯特采样率的 1.2 倍左右，以便留有过渡带. 即

$$f_s=2.4f_m$$

因为在本例中，f_s 是确定的，因此

$$f_m = \frac{f_s}{2.4} = \frac{10^4}{2.4} = 4.167\ \text{kHz}$$

即滤波器的带宽应为 4.167 kHz.

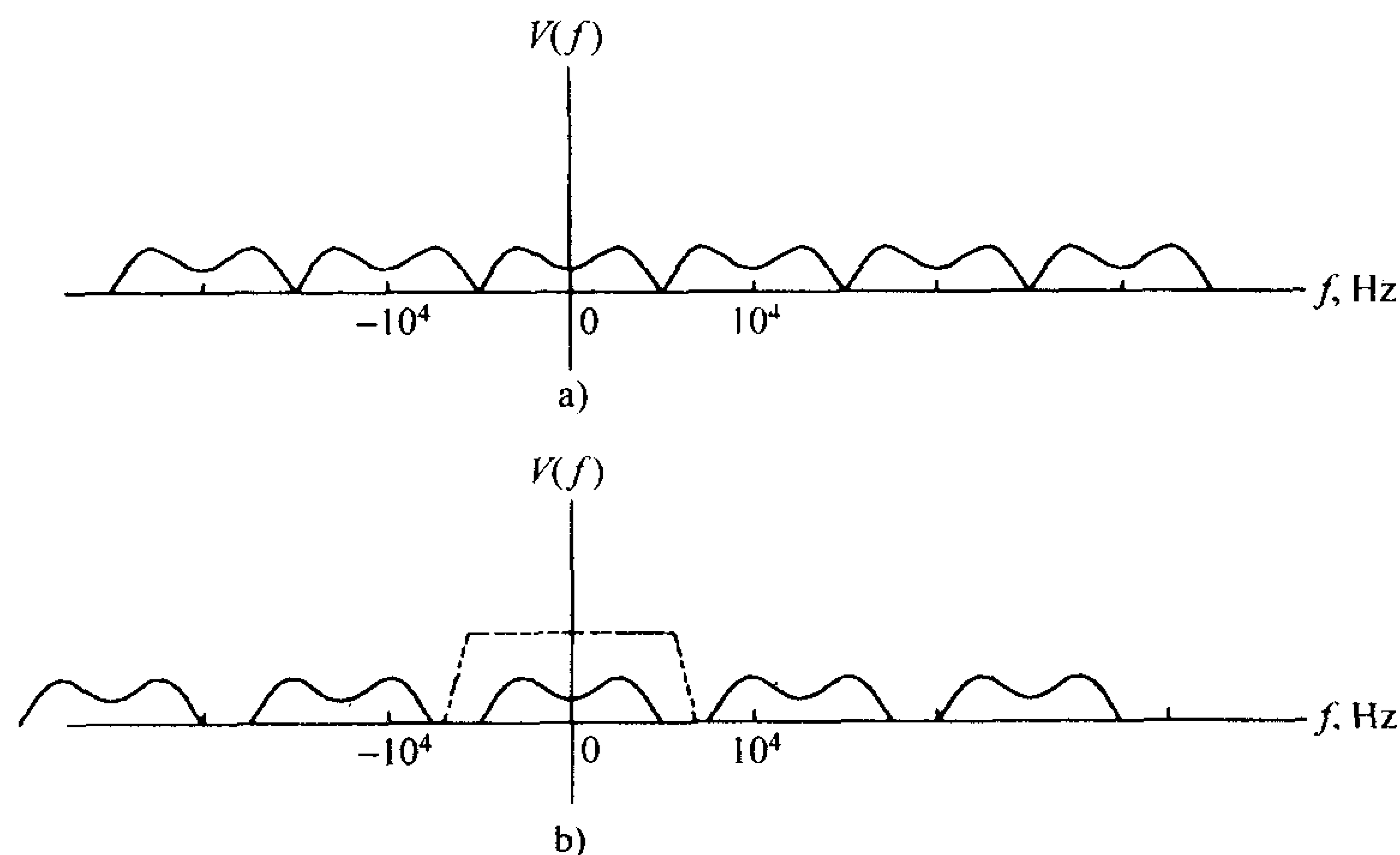


图 5-5 奈奎斯特采样率与实际采样率

练习 5.2 设信号为两个正弦波之和，$v(t)=\cos(6\pi t)+\sin(10\pi t)$.

(a)求奈奎斯特采样率.

(b)在实际应用中采样率应为多少？

答案：(a)10 Hz；(b)12 Hz.

85

图 5-6 所示为所谓的"尖桩篱栅"效应. 光看这些样本，就像看篱栅的一个个尖桩一样，我们不知道这些样本是来自于高频信号还是来自于低频信号. 该图也清楚地说明了混叠现象. 事实上只要用低于奈奎斯特采样率的采样率去采样一个高频信号，就总能找到一个与这些采样值相吻合的低频信号. 下面的例子也从另一个方面说明了这个效应.

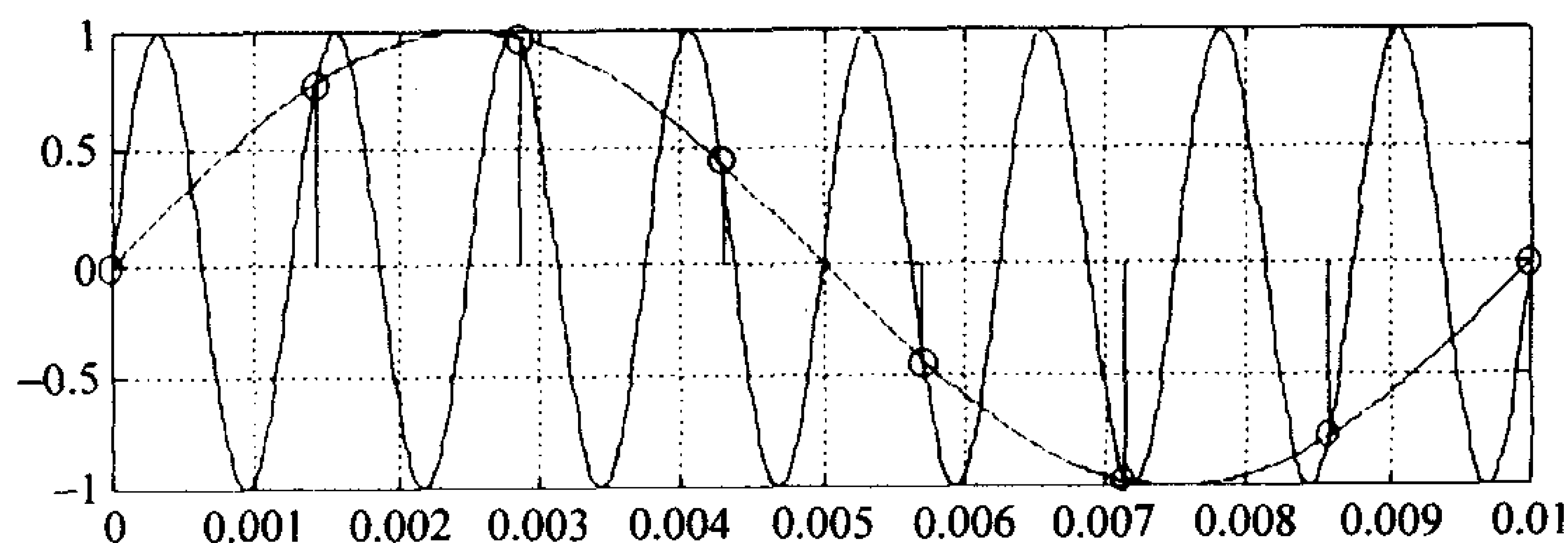


图 5-6 尖桩篱栅效应

例 5.3 本例通过用高于或低于奈奎斯特采样率的采样率对信号进行采样来说明尖桩篱栅效应．图 5-7 所示为采样率高于奈奎斯特采样率的情况，图 5-8 为采样率低于奈奎斯特采样率的情况．所有信号都是如下形式的连续时间正弦信号．

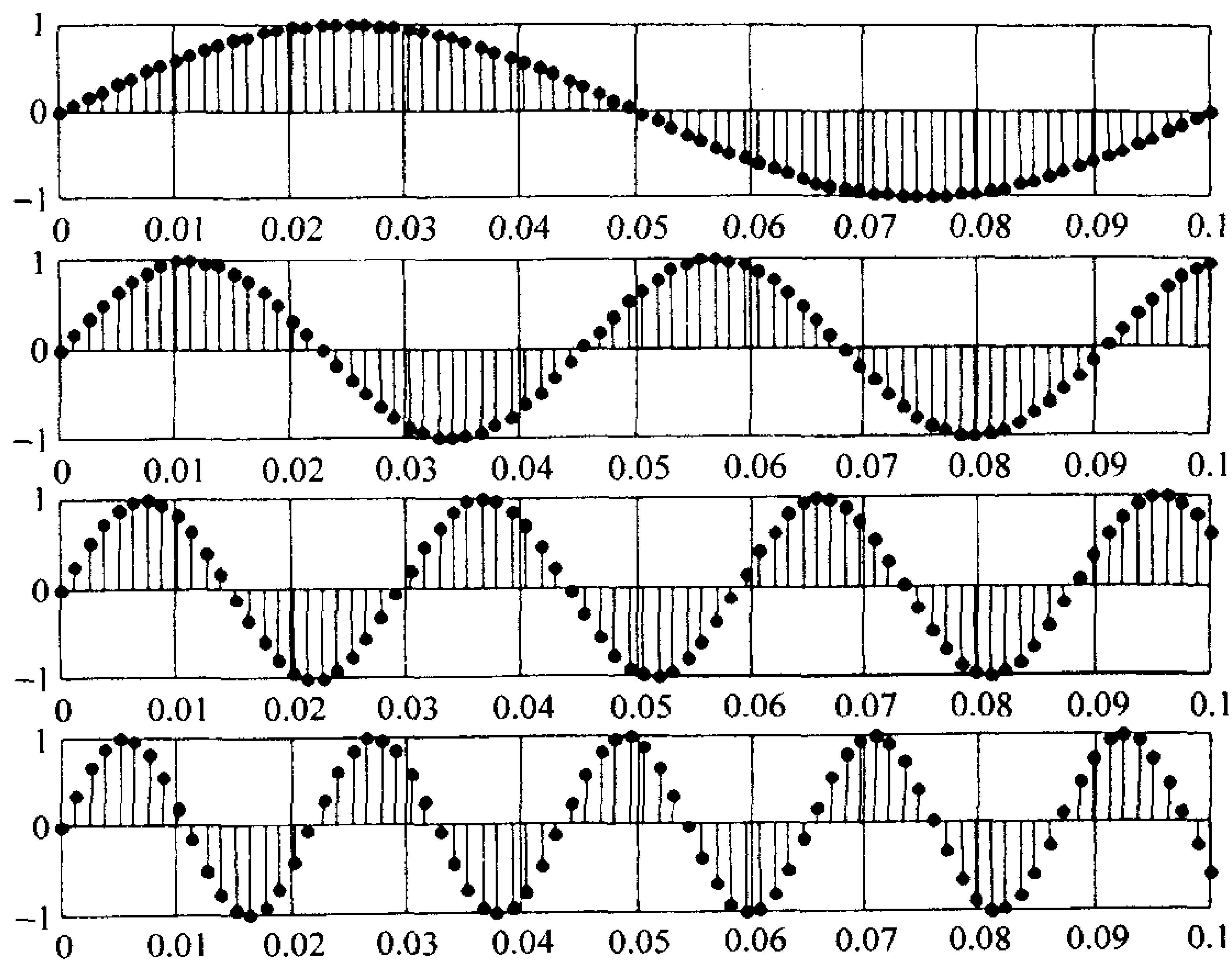


图 5-7 采样率高于奈奎斯特采样率

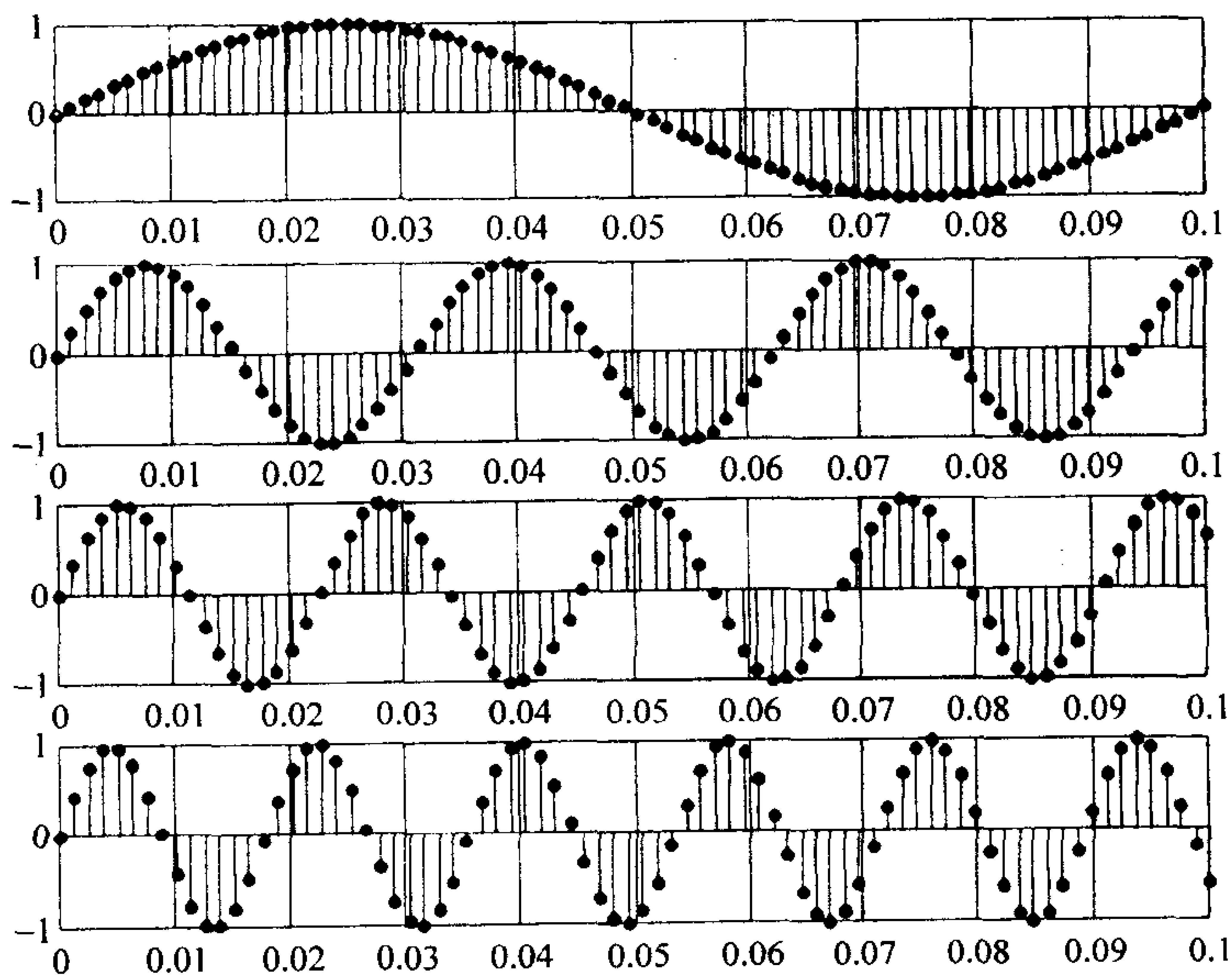


图 5-8 采样率低于奈奎斯特采样率

$$v(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

持续时间为 1 ms，频率范围从 $f_0 = 10$ Hz 到 $f_0 = 800$ Hz，信号的采样率均为 $r_s = 800$ Hz.

图 5-7 的顶部是频率 $f_0 = 10$ Hz 的正弦信号，第 2 个信号的频率为 $f_0 = 22$ Hz，第 3 个为 $f_0 = 34$ Hz，最后一个频率为 $f_0 = 46$ Hz. 因为采样频率为 800 Hz，所以，当信号频率 $f_0 < 400$ Hz 时，采样值就能正确描述原信号，如图 5-7 所示.

与图 5-7 中的信号形成对比的是图 5-8 中的 4 个正弦波. 与图 5-7 中的信号一样，它们的持续时间为 1 ms，采样频率 $r_s = 800$ Hz，但信号的频率范围是从 $f_0 = 732$ Hz 到 $f_0 = 800$ Hz. 值得注意的是，虽然图 5-8 中的信号频率远高于图 5-7 中的信号频率，波形却与图 5-7 十分相似. 这与我们在电影中看到的辐条车轮的反转现象是一个道理.

86 ~ 87

所有这些现象的本质问题都基于这样一个事实：我们不能区分一个信号是在高于奈奎斯特率的情况下得到的还是在低于奈奎斯特率的情况下得到的. 这就意味着我们既可以说图 5-8 表示的是在低于奈奎斯特率的情况下得到的采样信号，也可以说图 5-7 表示的是在高于奈奎斯特率的情况下得到的采样信号. 我们不能区分它们. ■

练习 5.3 在一张特制的运动图片上有一辆正行进在光滑平面上的马车. 车轮看上去是静止的. 车轮的直径为 4 英尺，有 12 条车辐. 设运动图片的帧采样率为 16 帧/每秒，问车轮最小的角速度为多少转/秒？

答案：4/5.

例 5.4 将信号 $v_1(t)$ 与 $v_2(t)$ 相乘，对它们的乘积按奈奎斯特采样率进行采样. 若两个信号的带宽分别是 ω_1 和 ω_2，求采样率.

解 两个信号在时域相乘等价于它们在频域作卷积.

$$v_1(t)v_2(t) \leftrightarrow V_1(\omega) * V_2(\omega)$$

乘积信号的带宽为 $\omega_1 + \omega_2$. 采样率 r_s 是带宽的 2 倍，因此

$$r_s = \frac{2(\omega_1 + \omega_2)}{2\pi} = \frac{1}{\pi}(\omega_1 + \omega_2)$$ ■

5.2 非周期采样

需要说明的是，混叠是周期采样的产物. 假如不是周期采样，采样函数 $p(t)$ 的谱就不会像图 5-2b 所示的那样，$v_s(t)$ 的谱也不会像图 5-2c 所示的那样呈现周期性，混叠就不会产生. 而可能出现的情况是，$v(t)$ 的谱由于非周期采样而呈现变形. 这使得即使可以由采样信号来恢复原信号，也会非常困难. 当然，这并不

88

意味着在任何应用环境都要采用周期采样．但是假如能够恢复原始信号，那么采样必须是周期性的．否则，可以任意选择周期或非周期采样．下面我们以一个例子来说明这一点．

例 5.5 本例的实验结果用以说明周期和非周期采样的不同．假设我们感兴趣的低频信号被嵌在一个高频信号中．我们可以通过高采样率用它们的采样信号完全恢复整个信号．但是，若采用中速均匀采样，由于混叠，高频信号将会被误认为低频信号．图 5-9 所示为频率 $\omega_1=2$ 和 $\omega_2=27.45\omega_1$ 的两个正弦信号的一部分，以及它们的和．

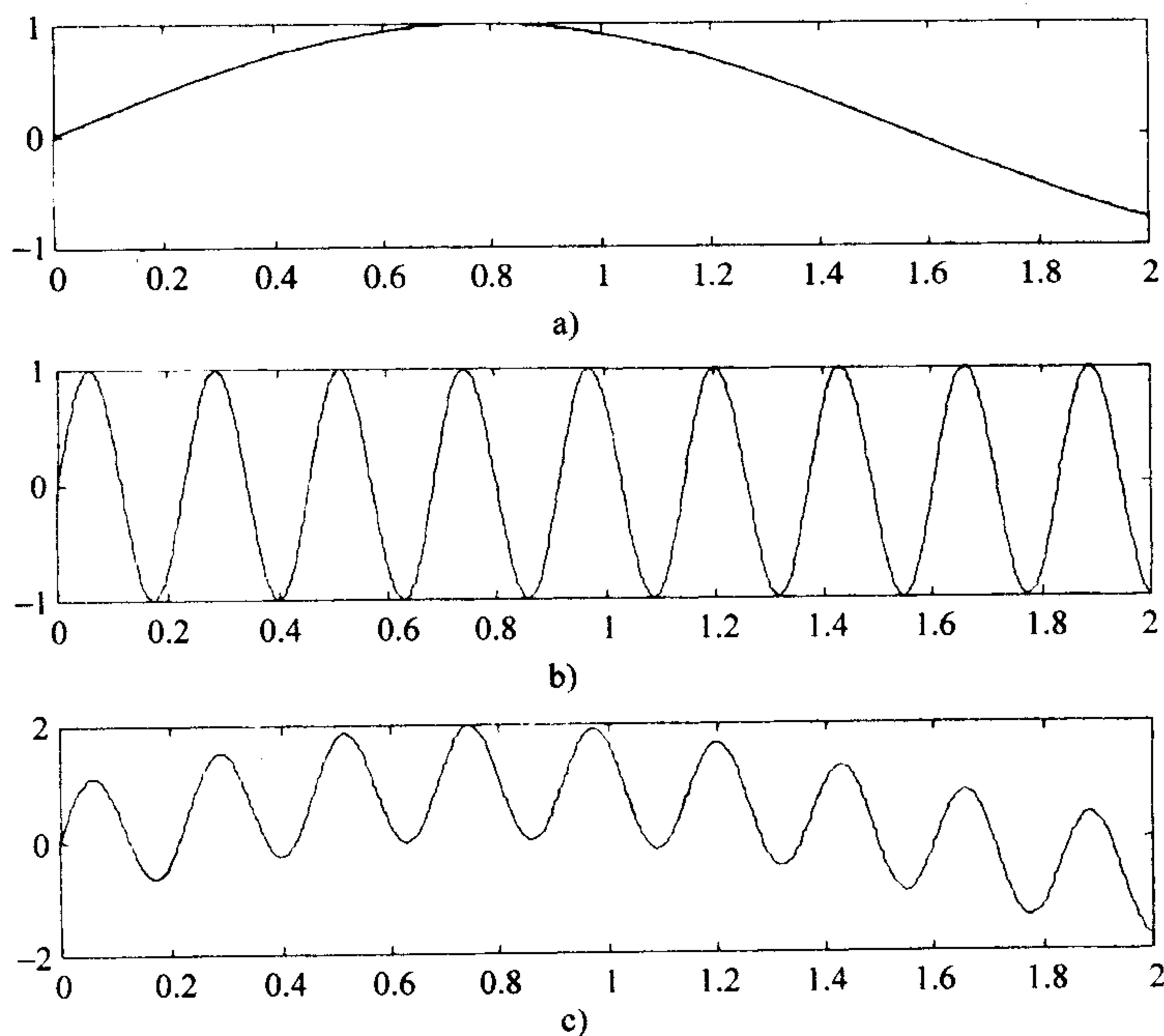


图 5-9 非均匀采样实验的信号

我们对和信号做两个实验，以说明周期和非周期采样的不同．第一个实验采用均匀采样，第二个的采样间隔随时间增加而增加．首先，我们对和信号进行均匀采样，采样率为 10 Hz，即 $31.42f_1$[1]．然后使用介于 $2f_1$ 和 $2f_2$[2]之间的中速采样率．图 5-10a 是由此得到的振幅谱．由于 $31.42f_1-27.45f_1=3.97f_1$，所以，在频率 $3.97f_1$ 处发生频率混叠．图 5-10b 是由非均匀采样得到的振幅谱，我们看到，这里没有出现图 5-10a 所示的频率混叠现象．注意，从图 5-10b 也可以看到，在所有频率处都出现了相当大的噪声．这又一次说明了世上没有免费的午餐——非均匀采样虽然消除了混叠，但却带来了噪声．

89

[1] 这里 f_1 表示 $\omega_1/2\pi$，即 $f_1=\omega_1/2\pi=1/\pi$．——译者注

[2] 这里 f_2 表示 $\omega_2/2\pi$，即 $f_2=\omega_2/2\pi=27.45/\pi$．——译者注

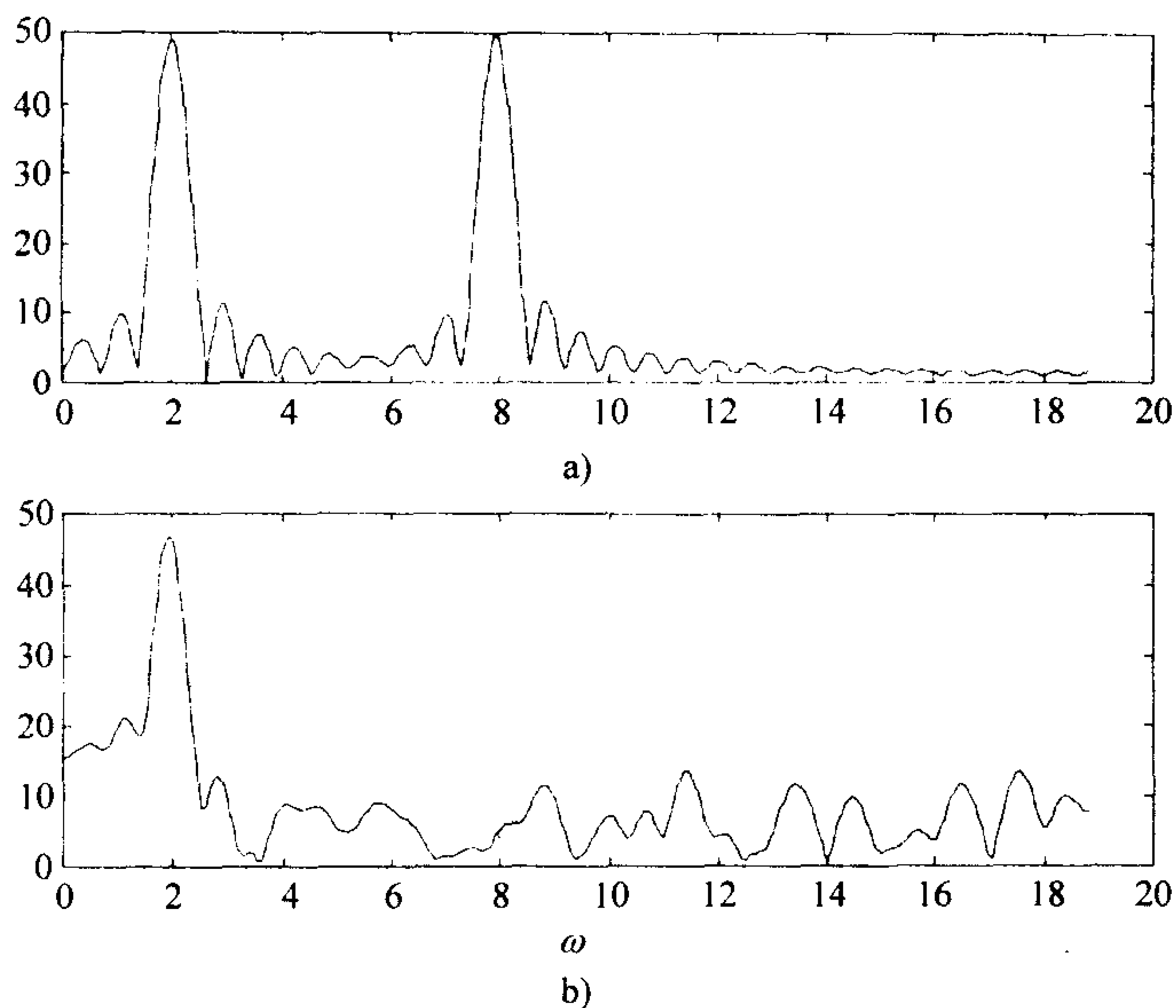


图 5-10 均匀采样和非均匀采样 ■

5.3 量化和脉冲编码调制

在现代生活中，采样随处可见. 比如打一次长途电话，我们要对声音信号进行采样、量化、编码、复合，并让它们与许多其他信号一起在同一个信道上进行传送；而在接收端则要对这些信号进行分离、解码，并按照某种方式把它们转换回模拟信号. 而用户却根本意识不到他们的声音信号经过了这些处理. 这些处理包括某种形式的编码，通常是脉冲编码调制(PCM). 下面将介绍量化和 PCM 的基本思想. [90]

数字计算机按二进制形式存储数字. B 位二进制数码有 2^B 种不同的组合，这意味着假如我们采用 B 位二进制数来表示所有的数的话，就必须把模拟信号的采样值量化成 2^B 个等级. 例如，若 $B=3$，则有 $2^3=8$ 个量化等级. 图 5-11 所示是一个信号的 13 个采样值，它们的量化等级为 8. 每一个量化值用三位二进制数表示，从 000 开始，到 111 为止. 将量化等级转换为二进制数的过程被称为脉冲编码调制(pulse code modulation).

练习 5.4 设一个音频信号的带宽为 20 kHz. 将信号进行采样、量化、再进行二进制编码，最后得到一个 PCM 信号.

(a) 假如按照高于奈奎斯特采样率 20% 的采样率进行采样，问采样率为多少?

(b) 假如采样信号按照 16 bits/样本的传输格式进行传输，问量化等级应为

多少？

(c) 信号编码的比特率(每秒传输的二进制位数)为多少？

答案：(a)48 000 样本/秒；(b)65 536 级；(c)768 000 bits/秒.

量化会导致误差，被称为*量化噪声*(quantization noise). 例如，假设图 5-11 所示的波形变化范围为 10 伏，则每个三位二进制数表示的变化范围为 1.25 伏(波形变化范围为 10 伏，只有 8 个量化等级，10/8=1.25). 假设每个等级的量化值取该等级的中心，那么，误差范围为−0.625 到 0.625.

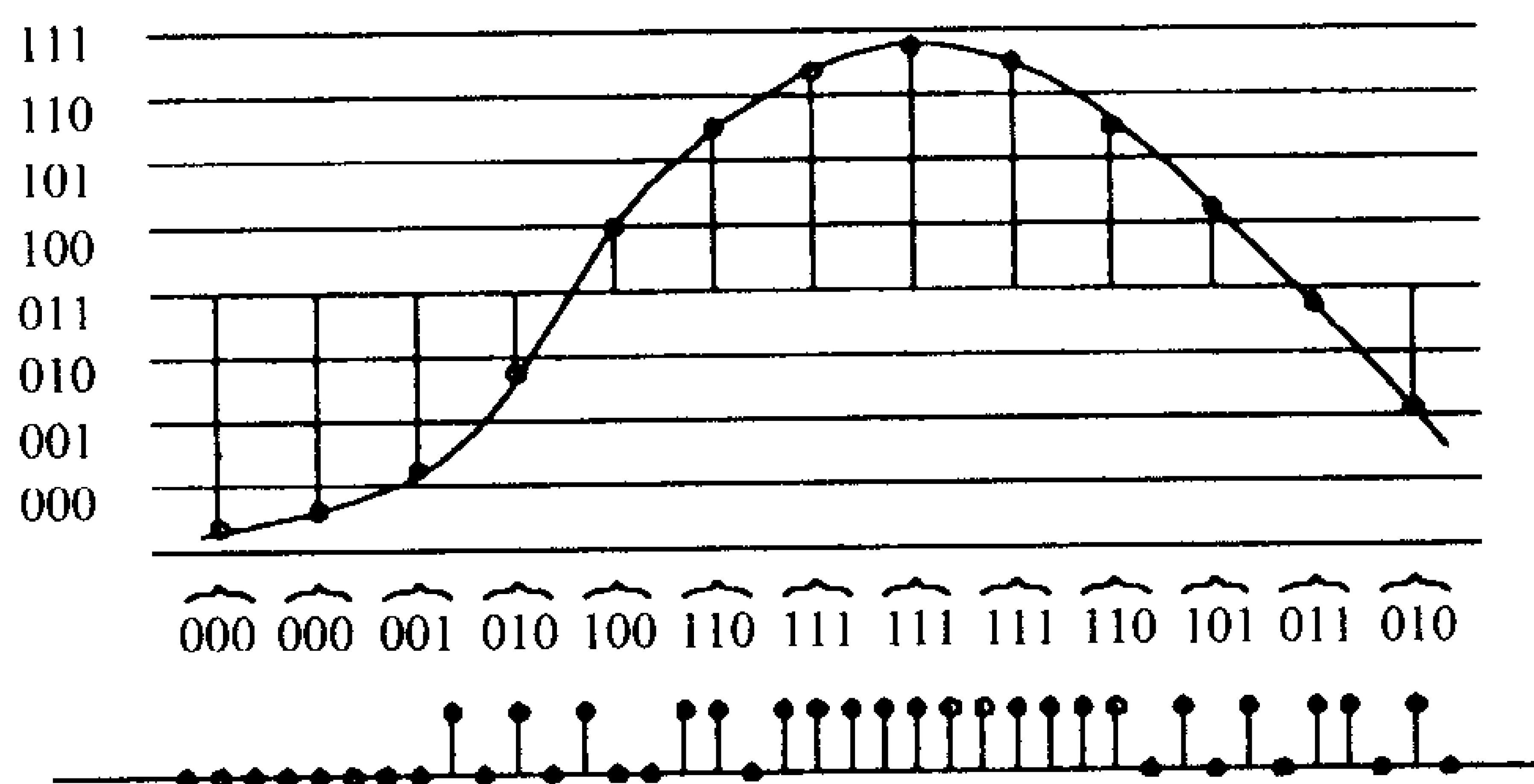


图 5-11 脉冲编码调制

91

设 q 表示每一个量化等级的范围(在本例中，$q=1.25$). 假设每个样本的量化误差 e 是服从均匀分布的随机变量，即 $-q/2\leqslant e\leqslant q/2$ 的任何误差值以等概率出现. 则量化噪声功率为

$$P_q=\int_{-q/2}^{q/2}e^2\left(\frac{1}{q}\right)\mathrm{d}e=\frac{q^2}{12} \tag{5-5}$$

这个公式是从哪里来的呢？事实上它是一个取值在$(-q/2, q/2)$上的服从均匀分布的随机变量的均方值. 因为误差被均匀地分布在这个范围内，所以，就得到这个量化噪声功率的公式.

例 5.6 假设一个振幅为 A 的正弦信号被采样、量化，量化范围为 q. 信号表示为

$$v(t)=A\sin\omega t$$

求信号与量化噪声功率的分贝信噪比(SNR)，即

$$\mathrm{SNR}=10\log\frac{P_s}{P_q}$$

解 信号功率为 $P_s=A^2/2$. 量化噪声功率为 $P_q=q^2/12$. 信号振幅 A 与量化范围存在以下关系：

$$2^B = \frac{2A}{q}$$

即，量化为 2^B 个等级，每个量化等级的高为 q，量化数值范围为$(-A, A)$. 代入信号与量化噪声功率分贝信噪比公式，有

$$\mathrm{SNR} = 10\log\left(\frac{A^2/2}{q^2/12}\right) = 10\log\left(\frac{3\times 2^{2B}}{2}\right) = 1.76 + 6.02B\ \mathrm{dB}$$ ■ [92]

5.4 压扩量化

图 5-11 是均匀量化的示例. 假设波形变化范围为 10 伏，8 个量化等级，那么，每一个量化等级的量化值表示的是这个量化等级的 1.25 伏范围内的任意值. 对这种量化方式只作一点点改变就可以提高某些信号的信噪比. 假设待量化的信号的大多数取值只在一个很小的范围内，比如说信号可能的取值范围为－5 伏到＋5 伏，但是大多数取值在－2 伏到＋2 伏内. 那么，在－2 伏到＋2 伏内设置较多的量化等级，在－5 伏到－2 伏和＋2 伏到＋5 伏内设置较少的量化等级就是有意义的. 图 5-12 是另一种量化方式的示意图. 注意，在靠近 0 的地方量化等级之间的距离比较小，而在靠近－5 伏和＋5 伏的地方量化等级之间的距离比较大. 因此，在靠近 0 的地方量化误差较小，而在量化等级较大的地方(－5 伏和＋5 伏处)量化误差也较大.

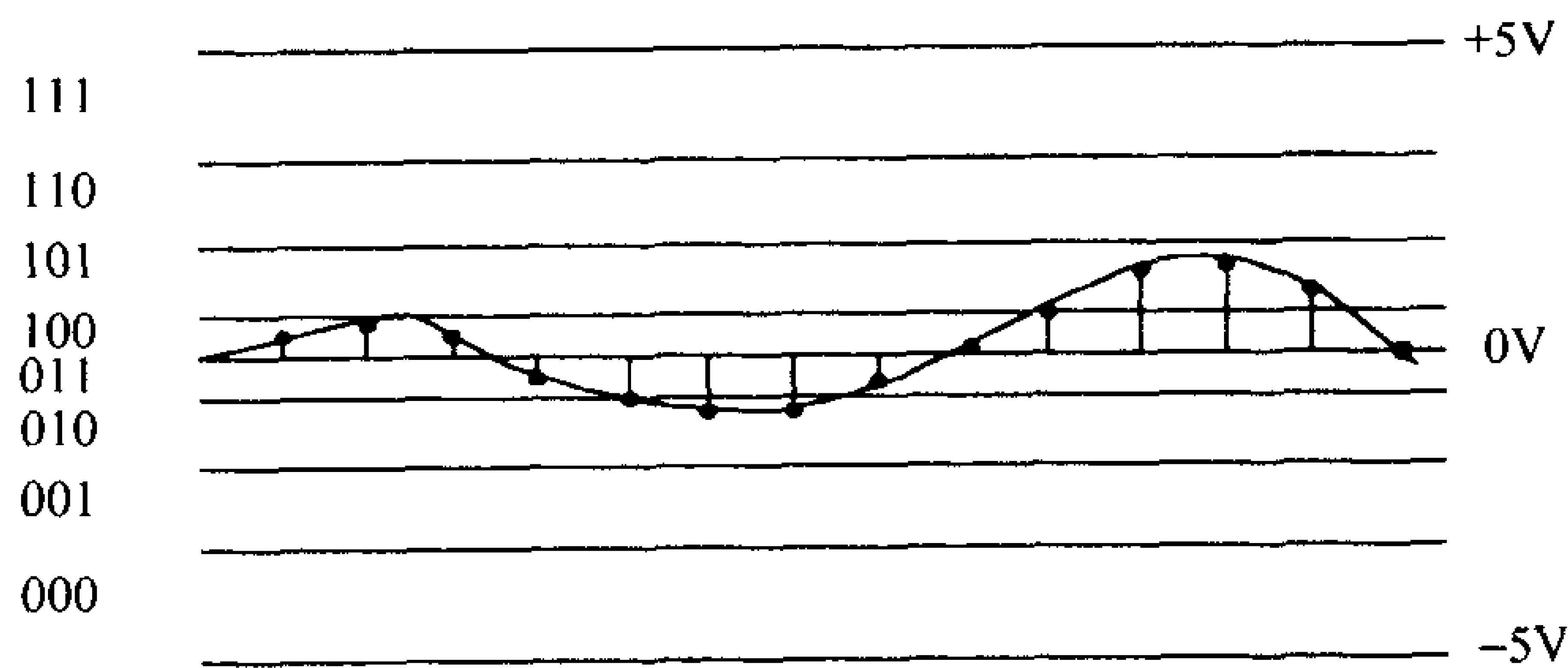


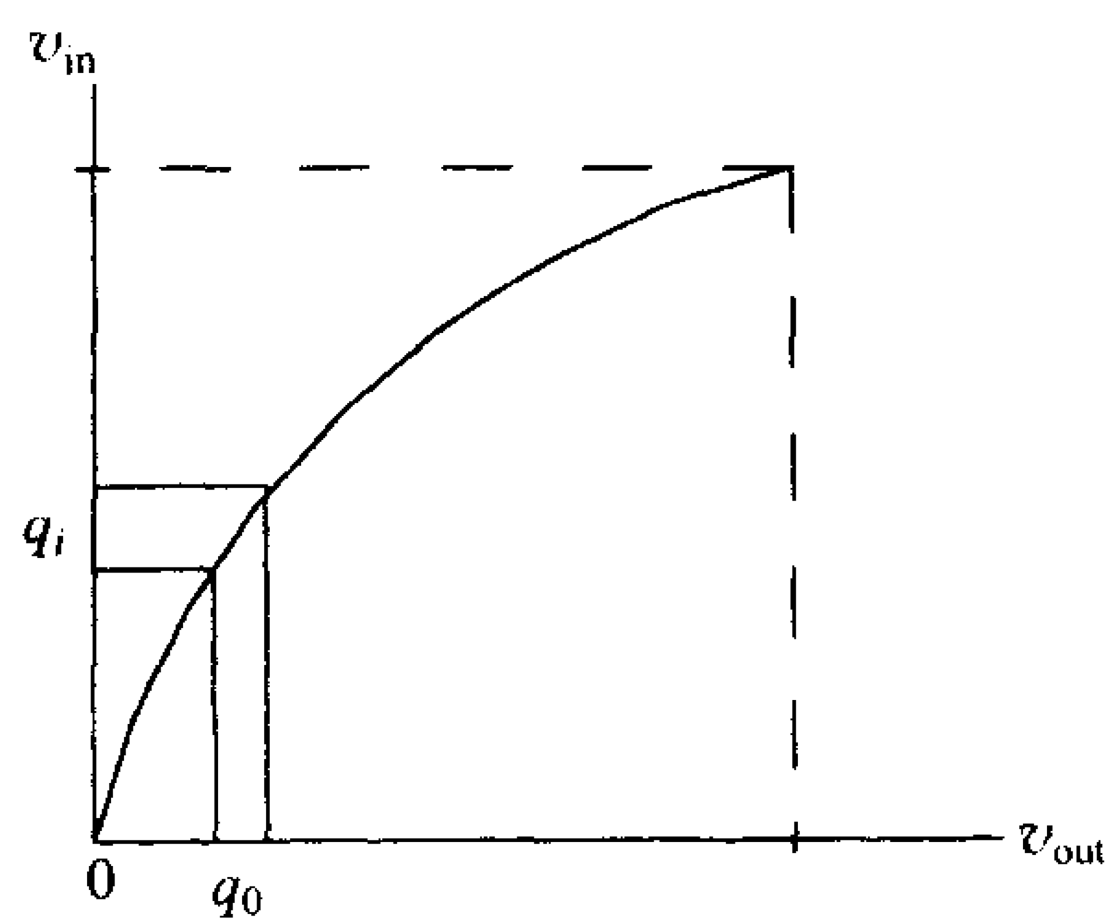
图 5-12 非均匀量化

非均匀量化的目的是使信号的信噪比在每一个输入信号等级内尽可能相等. 也就是说，假如一个人说话很柔和，那么在低振幅段设置较多的量化等级将会提高信噪比. 而假设这个人说话声很高，那么这个量化方案将会使信噪比降低. 由式(5-5)，量化噪声功率为 $q^2/12$，其中 q 为一个量化等级的范围. 假设 q 随振幅变化，那么噪声也将随振幅变化. 这样做有可能提高，也有可能会降低信号的信噪比. 对于低振幅信号而言，在信号的低振幅段取较小的 q 将会使信号的信噪比提高.

非均匀量化是对量化器作改变而保持信号不变. 另一个等价的方法是仍然采用均匀量化器但是对信号作改变. 因为在传输过程中要同时对信号作压缩和扩

93 展，因此称它为*压扩*(companding).

图 5-13 是一个典型的压扩特性示意图. 在信号的低振幅段，输出信号的变化小于输入信号的变化. 而在高振幅段，情况正好相反. 将输出信号 v_{out} 输入均匀量化器进行量化、采样和进行 PCM 编码，然后再作传输. 接收器对接收到的信号进行解码、将其变换为模拟信号、然后对信号进行逆压扩. 因为易于求逆运算，所以通常采用对数曲线作为压扩特性曲线.



94 图 5-13 压扩曲线

第6章　多速率采样

多速率处理在很多应用中都很重要．小波变换就可以认为是一种多速率处理．下采样结合相关运算形成分解方程(正变换)，上采样结合卷积运算形成合成方程(逆变换)．在第7章的快速傅里叶变换(FFT)中我们也将用到这些技术．

许多应用都在同一个系统中使用了不同的采样率．例如，在数字音频系统中就使用了三种不同的采样率：广播系统使用32 kHz，数字压缩光盘(CD)使用46.1 kHz，而数字音频磁带(DAT)使用48 kHz．如果一个音频放大器要能够适用于这三种采样信号，那么它必须能够方便地在这三种采样率之间进行转换．解决这个问题的方法之一是使用三个不同的D/A转换单元，一个单元对应一种采样率．另一种方法是在数模转换之前将两种信号的采样率统一转换为第三种采样率．这种采样率的转换能够直接在数字域内进行而不需要使用模拟信号．本章将重点讨论怎样实现上述转换．

本章目标　**读完本章以后，读者应该掌握：**

- 给定信号 $v(n)$ 和下采样因子 D，求出并画出下采样信号 $v_d(n)$ 的谱．
- 给定信号 $v(n)$ 和上采样因子 U，求出并画出上采样信号 $v_u(n)$ 的谱．
- 对给定信号 $h(n)$ 和 $x(n)$，画出它经过下采样并进行相关运算之后的结果．
- 对给定信号 $h(n)$ 和 $x(n)$，画出它经过卷积运算并进行上采样之后的结果．

6.1　下采样

下采样又称为抽选，是按照因子 D 降低采样率的过程．上采样又称为插值，是按照因子 U 提高采样率的过程．将这两个运算进行分层级联，就可以通过调节因子 U/D 来改变采样率．首先考虑下采样．图6-1是下采样的示意图，图中 $v(n)$ 为系统输入，$v_d(n)$ 为输出．图6-2给出了信号 $v(n)$，中间信号 $v_a(n)$ 和最后被抽选的信号 $v_d(n)$ 的示意图．中间信号的产生方法是每隔三个样本抽选一个．要从 $v(n)$ 得到 $v_a(n)$，只要把每三个采样中的前两个置零，然后将那些被置零的样本扔掉即可．因此，在本例中，$D=3$．该信号在时域的表示为

$$v_d(n) = v(nD) = v_a(nD) \tag{6-1}$$



图 6-1 下采样示意图

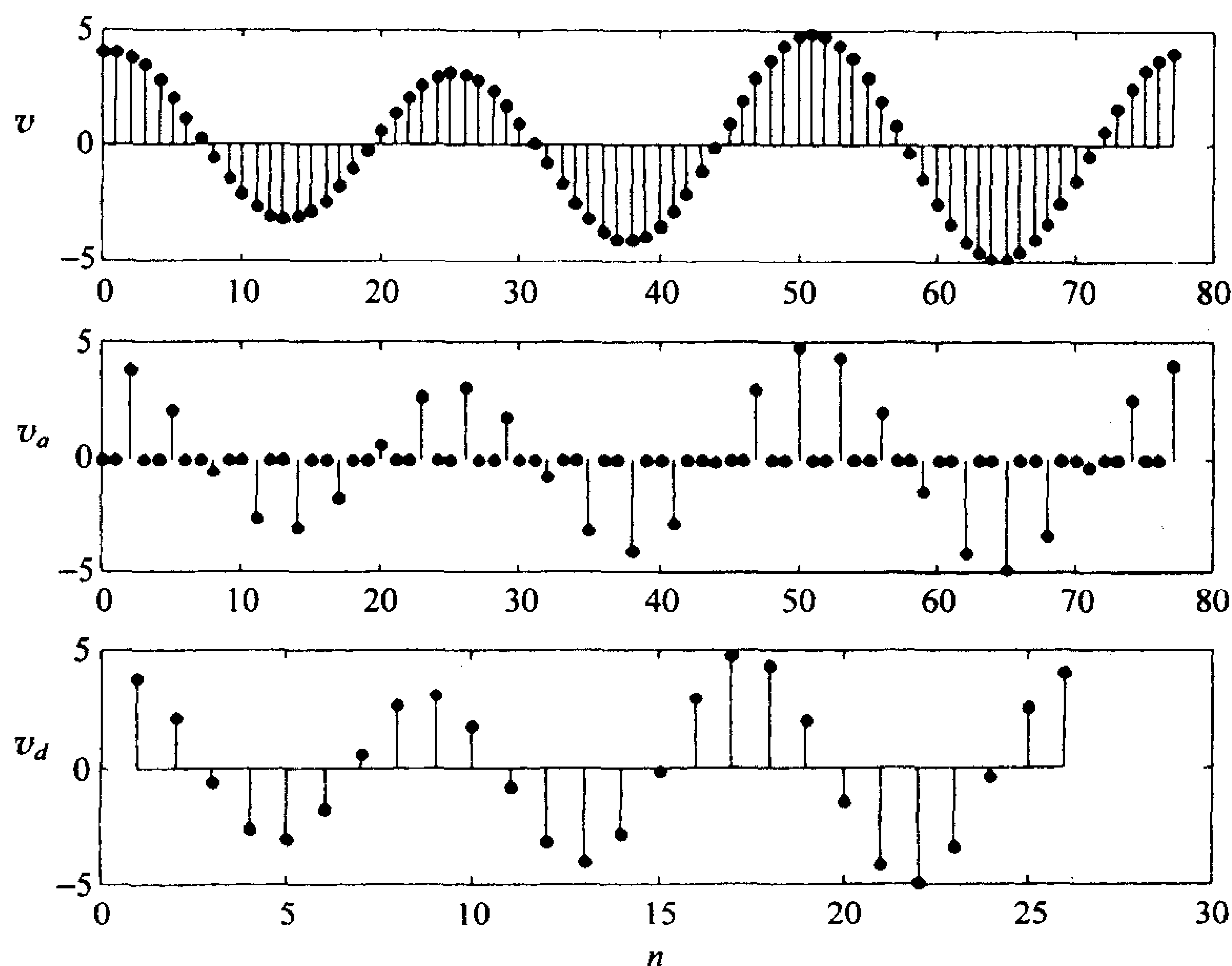


图 6-2 下采样过程

为了得到 $V(\Omega)$ 和 $V_d(\Omega)$ 的关系，我们定义两个函数

$$v_a(n)=\begin{cases}V(n), & n=0,\pm D,\pm 2D,\cdots \\ 0, & 其他\end{cases} \tag{6-2}$$

$$p(n)=\begin{cases}1, & n=0,\pm D,\pm 2D,\cdots \\ 0, & 其他\end{cases} \tag{6-3}$$

易知

$$v_a(n)=p(n)v(n)$$

图 6-3 是函数 $v(n)$，$p(n)$ 和 $v_a(n)$ 的示意图. 注意，$v(n)$ 乘以 $p(n)$ 得到中间信号 $v_a(n)$，然后删掉那些被置零的项(每三个采样中的前两个)就得到 $v_d(n)$，如图 6-2 所示.

现在我们希望将 $p(n)$ 表示为一个傅里叶级数. 在后文中我们将用 $p(n)$ 的傅里叶级数 $p(\ell)$ 代替 $p(n)$，将其表示为

$$p(\ell)=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k\ell/D} \tag{6-4}$$

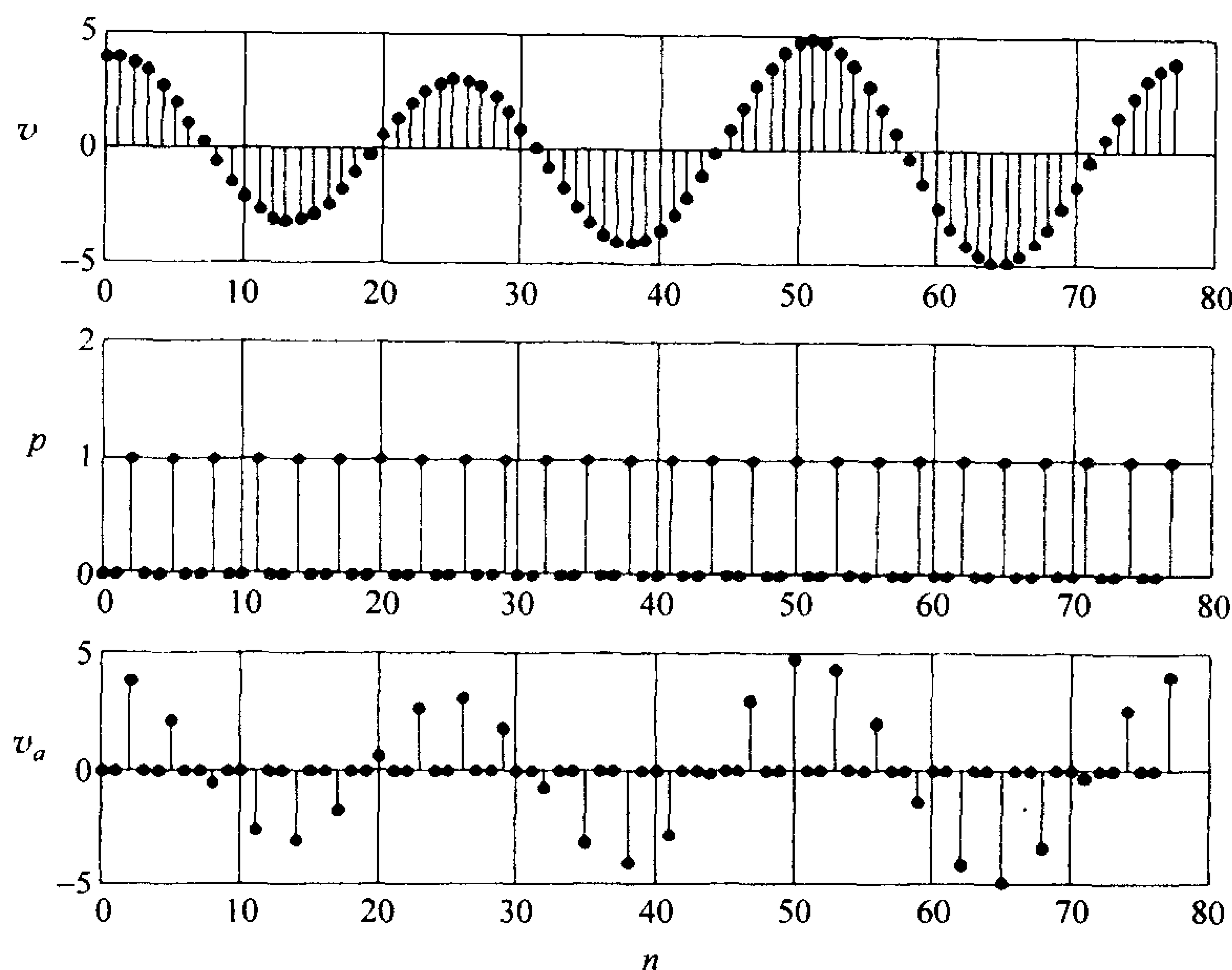


图 6-3 $v(n)$与$p(n)$相乘等于$v_a(n)$

96～97

我们用式(6-1)～式(6-4)来推导出$V(\Omega)$和$V_d(\Omega)$的关系．先作z变换，然后令$z=e^{j\Omega}$．$v_d(n)$的z变换为

$$V_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_d(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(nD)z^{-n}$$

改变求和指数，令$\ell=nD$，或$n=\ell/D$，有

$$V_d(z)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}v_a(\ell)z^{-\ell/D}=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}p(\ell)v(\ell)z^{-\ell/D}$$

将式(6-4)代入上式，得

$$V_d(z)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}e^{j2\pi k\ell/D}\right]v(\ell)z^{-\ell/D}$$

关于上式中的二重求和运算，通常的做法是先交换两个求和的顺序．于是有

$$V_d(z)=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}v(\ell)\left[e^{-j2\pi k/D}z^{1/D}\right]^{-\ell} \tag{6-5}$$

注意到对ℓ的求和具有z变换形式，即假如我们把常规的z变换写成

$$V(z)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}v(\ell)z^{-\ell}$$

则式(6-5)的求和运算可以写成

$$V(e^{-j2\pi k/D}z^{1/D}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} v(\ell)(e^{-j2\pi k/D}z^{1/D})^{-\ell}$$

98 因此，式(6-5)中的 $V_d(z)$ 为

$$V_d(z) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V(e^{-j2\pi k/D}z^{1/D}) \tag{6-6}$$

这个公式表示什么意思呢？为了绘图方便，我们将 z 变换换成傅里叶变换，即令 $z=e^{j\Omega}$，有

$$V_d(\Omega) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V(e^{j(\Omega-2\pi k)/D}) \tag{6-7a}$$

或按更常规的记号表示为

$$V_d(\Omega) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V([\Omega-2\pi k]/D) \tag{6-7b}$$

注意到 $V(\Omega)$ 是 $V(e^{j\Omega})$ 的简化表示，式(6-7)就是我们所要找的关系式. 通过式(6-7)，一个按因子 D 下采样的信号，其傅里叶变换可以由原信号的 $V(\Omega)$ 给出. 式(6-7)总共包含 D 项. 假如原信号的谱为 $V(\Omega)=V(e^{j\Omega})$，那么下采样信号的谱 $V_d(\Omega)$ 是其中的 D 项，每一项是对原信号作一次平移的结果. 下面给出一些例子，以说明这个公式的意义.

例 6.1 设 $V(\Omega)=V(e^{j\Omega})$ 如图 6-4 所示. 画出谱 $V(e^{j(\Omega-2\pi)/D})$，其中

(a) $D=2$.

(b) $D=3$.

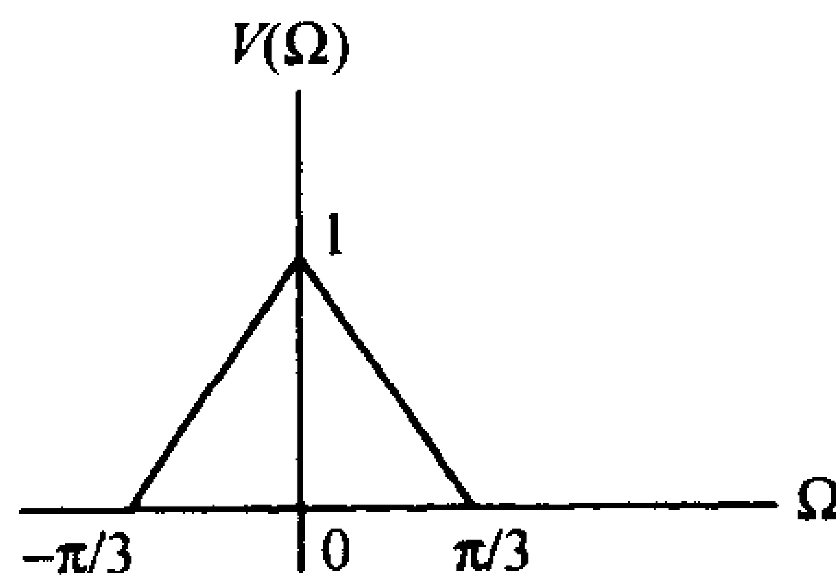


图 6-4 $V(\Omega)$ 的示意图

解 对 $D=2$，$V(\Omega/2)$ 的谱(在平移前)按因子 2 膨胀. 我们考虑阿干特图(Argand diagram，复平面的别称)上的单位圆，则谱 $V(e^{j(\Omega-2\pi)/D})$ 为 $V(e^{j\Omega/D})$ 按逆时针方向绕单位圆旋转 $2\pi/D=\pi$ 个单位所得. 当表示为常规傅里叶形式时(以 Ω 为自变量)，其结果如图 6-5a 所示. 类似地，当 $D=3$ 时，围绕单位圆移动的单位是 $2\pi/3$，函数按照因子 3 膨胀，结果如图 6-5b 所示.

99

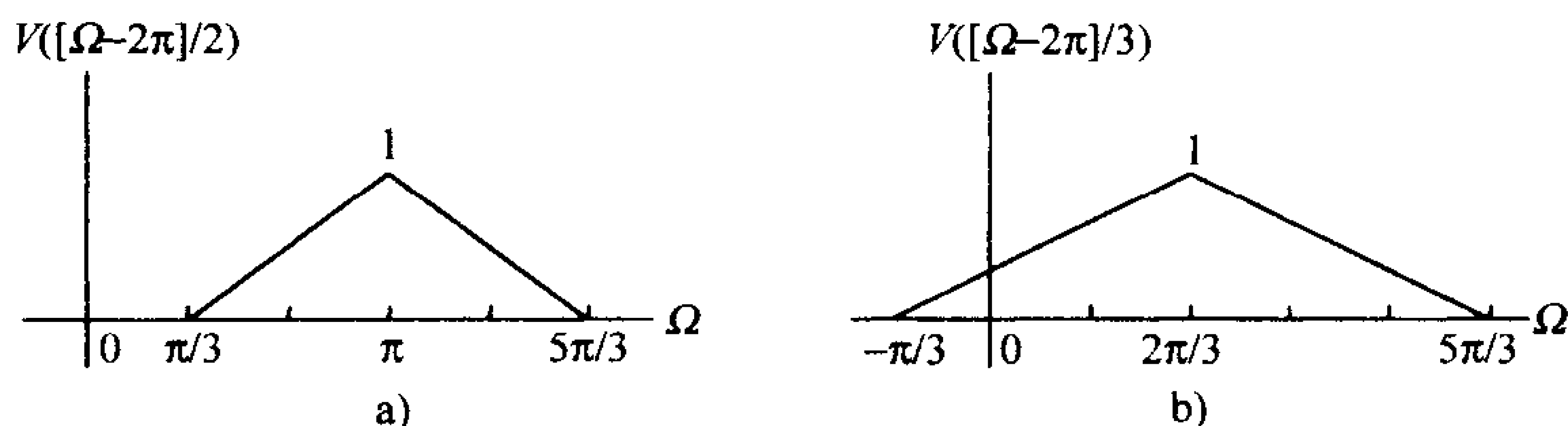


图 6-5　$D=2$ 和 $D=3$ 时 $V(e^{j(\Omega-2\pi)/D})$的示意图 ■

例 6.2　若 $V(\Omega)$如图 6-4 所示，画出当 $D=2$ 时的 $V_d(\Omega)$.

解　令式(6-7a)中的 $D=2$，有

$$V_d(\Omega)=\frac{1}{2}\{V(e^{j\Omega/2})+V(e^{j(\Omega-2\pi)/2})\}$$

上式包含两项，一项以 0 为中心，另一项以 π 为中心，两项的振幅均为 1/2，如图 6-6 所示. 然而，按照离散时间表示，该信号以 2π 为周期. 它包含明显的谱重叠(混叠)，因此需要对信号进行滤波以限制 $V(\Omega)$的带宽.

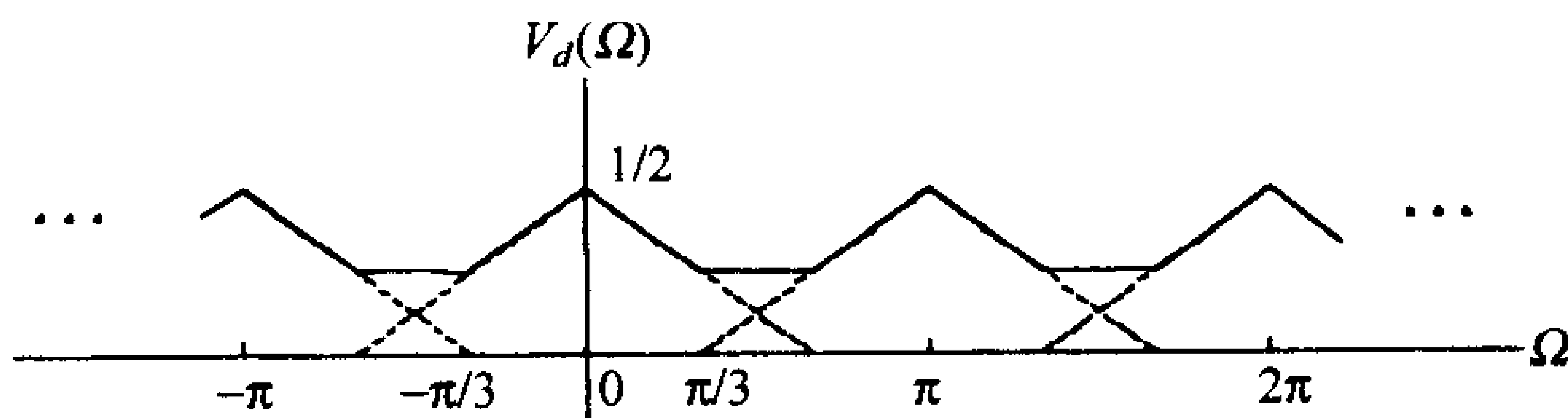


图 6-6　例 6.2 的解 ■

下面，我们从另外一个角度来看这一过程. 我们以图 6-7 所示的 $D=3$ 时的情形来继续讨论. 当 $D=3$ 时，式(6-7)为

$$V_d(\Omega)=\frac{1}{3}\{V(e^{j\Omega/3})+V(e^{j(\Omega-2\pi)/3})+V(e^{j(\Omega-4\pi)/3})\}$$

注意，原始信号 $V(\Omega)$中的每一项在图 6-7b 所示的 $V_a(\Omega)$中有三项与之对应. 由于 $V(\Omega)$的带宽为 $\pi/3$，$V_a(\Omega)$没有重叠(即没有混叠). 但是，若 $V(\Omega)$的带宽再大一点，就会出现混叠了. 为了能够从图 6-7 中的 $V(\Omega)$导出 $V_{\bar{a}}(\Omega)$，我们重写式(6-1). 100

$$v_d(n)=v(nD)=v_a(nD)\qquad \text{重写式(6-1)}$$

用记号 $v_\ell(n)$表示如下函数：

$$v_\ell(n)=\begin{cases}v\left(\dfrac{n}{\ell}\right), & \text{当 } n \text{ 为 } \ell \text{ 的整数倍时}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

DTFT 的时间膨胀性质可表示为

$$v_\ell(n) \leftrightarrow V(\ell\Omega)$$

图6-7中的信号$v_d(n)$充当了时间膨胀性质中$v(n)$的角色，而$v_a(n)$则充当$v_\ell(n)$的角色. 因此，$v_a(n)$的谱与$v_d(n)$的谱具有如下关系：

$$v_a(n) \leftrightarrow V_a(\Omega) = V_d(D\Omega)$$

相反地

$$V_d(n) \leftrightarrow V_d(\Omega) = V_a\left(\frac{\Omega}{D}\right)$$

比较图6-7中的(b)和(c)，不难发现这个关系是显而易见的.

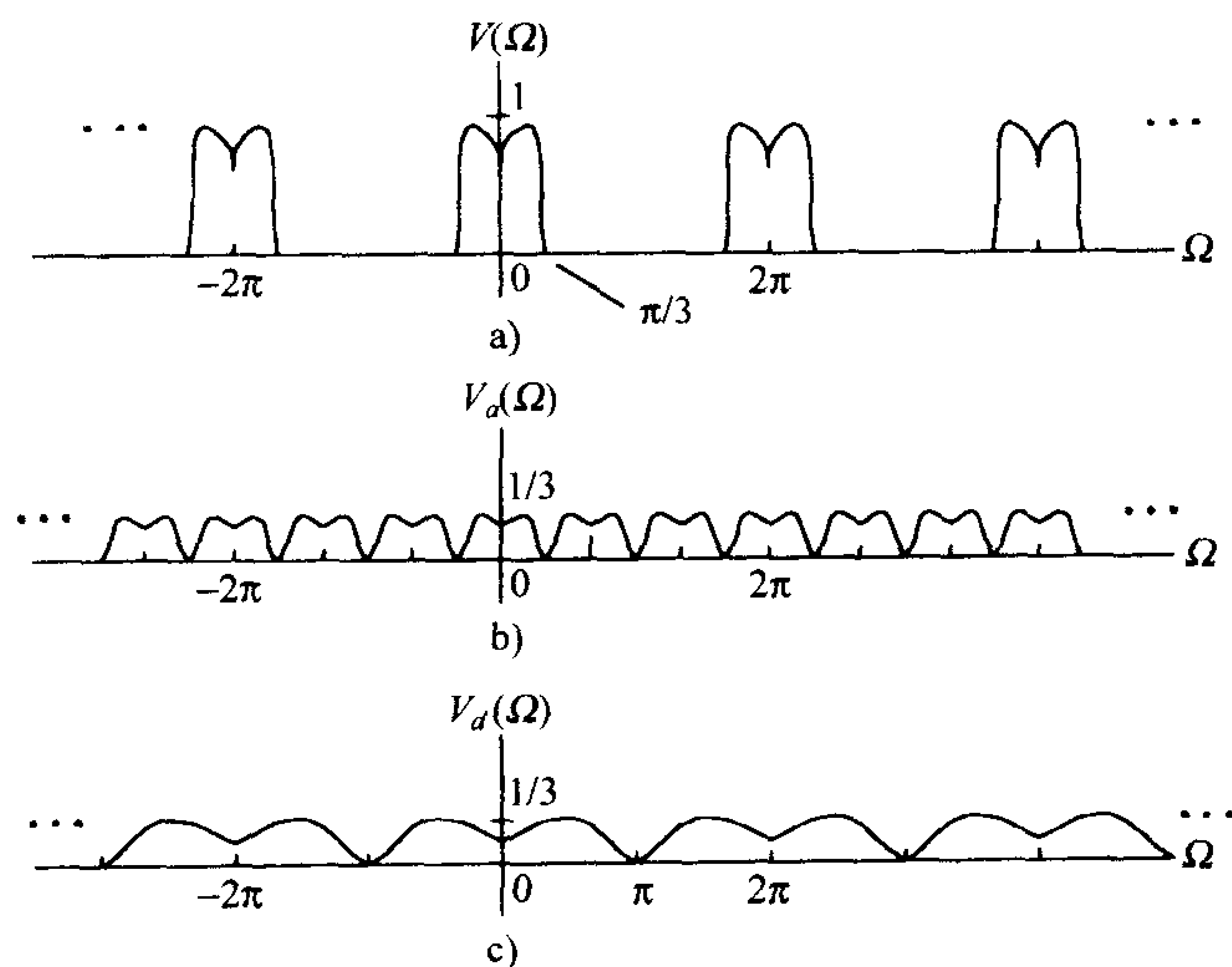


图6-7 下采样的进一步解释

我们可以通过在下采样运算之前设置一个低通滤波器来避免混叠现象的产生. 滤波器的带宽由因子D确定，与信号的带宽无关. 这就是说，为了避免混叠，要对信号滤波，以使它的最大频率为$\Omega_m=\pi/D$，就像图6-7所示的那样，在那里$D=3$. 显然，当模拟信号的带宽大于$\pi r_s/D$(r_s为采样率)时会引起信号的变形. 图6-8给出了这种先进行滤波然后作下采样的过程示意图.

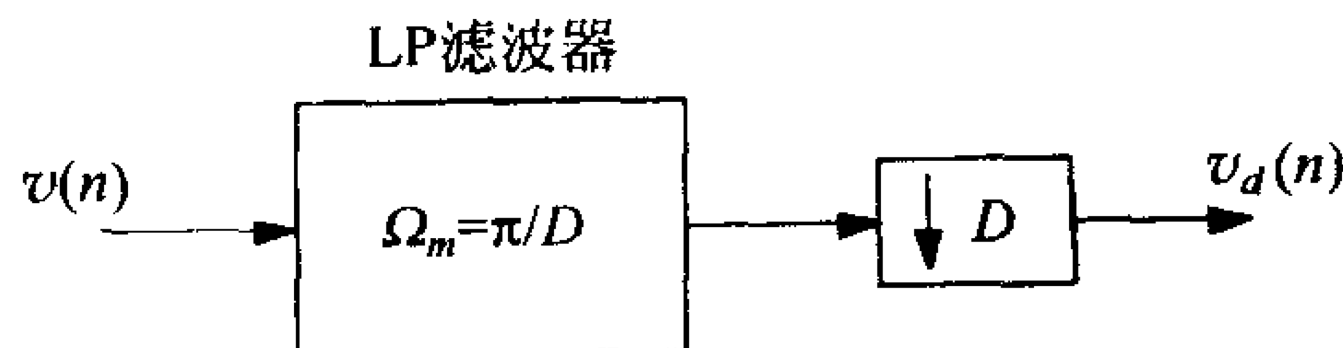


图6-8 先滤波后下采样的过程

$D=2$是一个重要的情况，在后面将要讨论的小波中尤为重要. 此时，式(6-7)变为

$$V_d(\Omega) = \frac{1}{2}\{V(e^{j\Omega/2}) + V(e^{j(\Omega-2\pi)/2})\} \tag{6-8}$$

练习 6.1 若 $V(\Omega)$如图 6-9 所示，画出如下函数的图形：

$$V_d(\Omega) = \frac{1}{2}\{V(e^{j\Omega/2}) + V(e^{j(\Omega-2\pi)/2})\}$$

答案：见图 6-10.

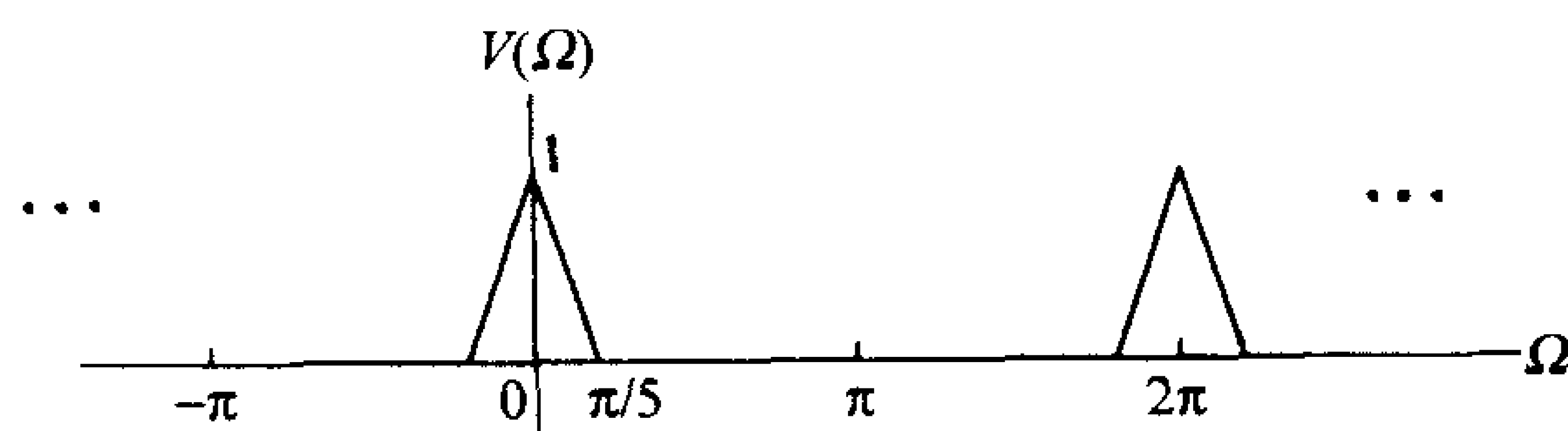


图 6-9 练习 6.1 中的波形

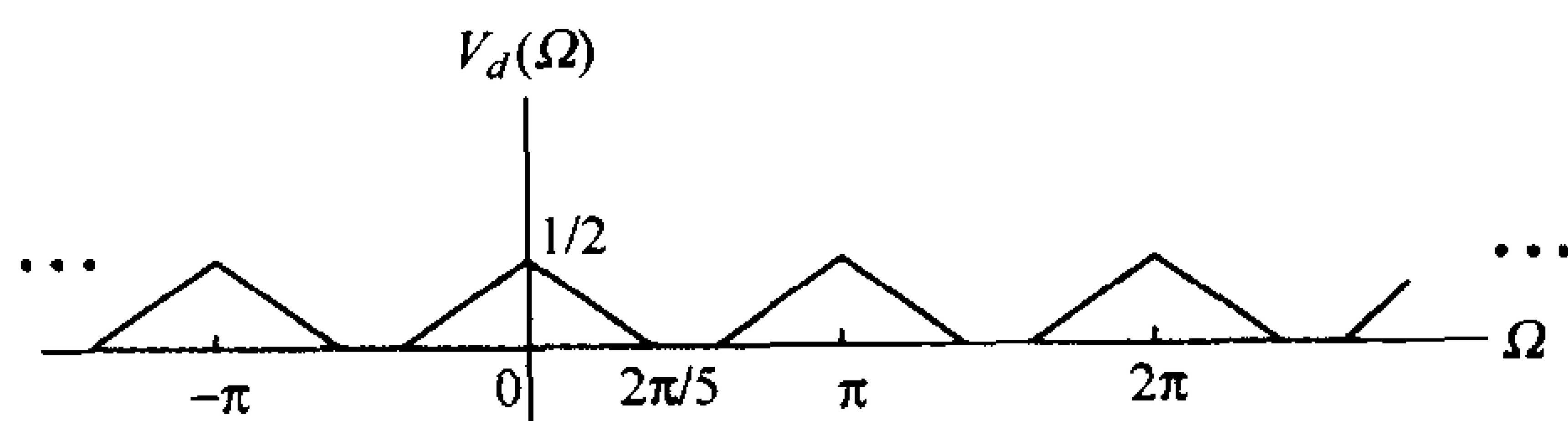


图 6-10 练习 6.1 的答案

101~102

6.2 上采样

图 6-11 是一个上采样(插值)过程与一个低通滤波过程相连的示意图，上采样因子为 U. 上采样过程先在 $v(n)$的每两个样本之间插入 $U-1$ 个 0，得到 $v_b(n)$，然后经过滤波得到 $v_u(n)$，如图 6-12 所示. 上采样在时间域对 $v(n)$作扩充，因而等效于在频率域作收缩.

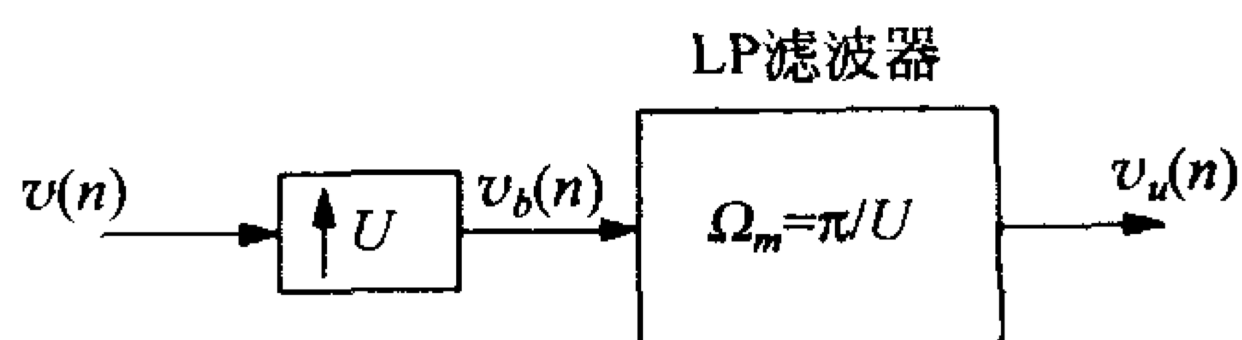


图 6-11 先上采样后滤波的示意图

将 $v_b(n)$用 $v(n)$表示为

$$v_b(n) = \begin{cases} v(n/U), & n = 0, \pm U, \pm 2U, \cdots \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

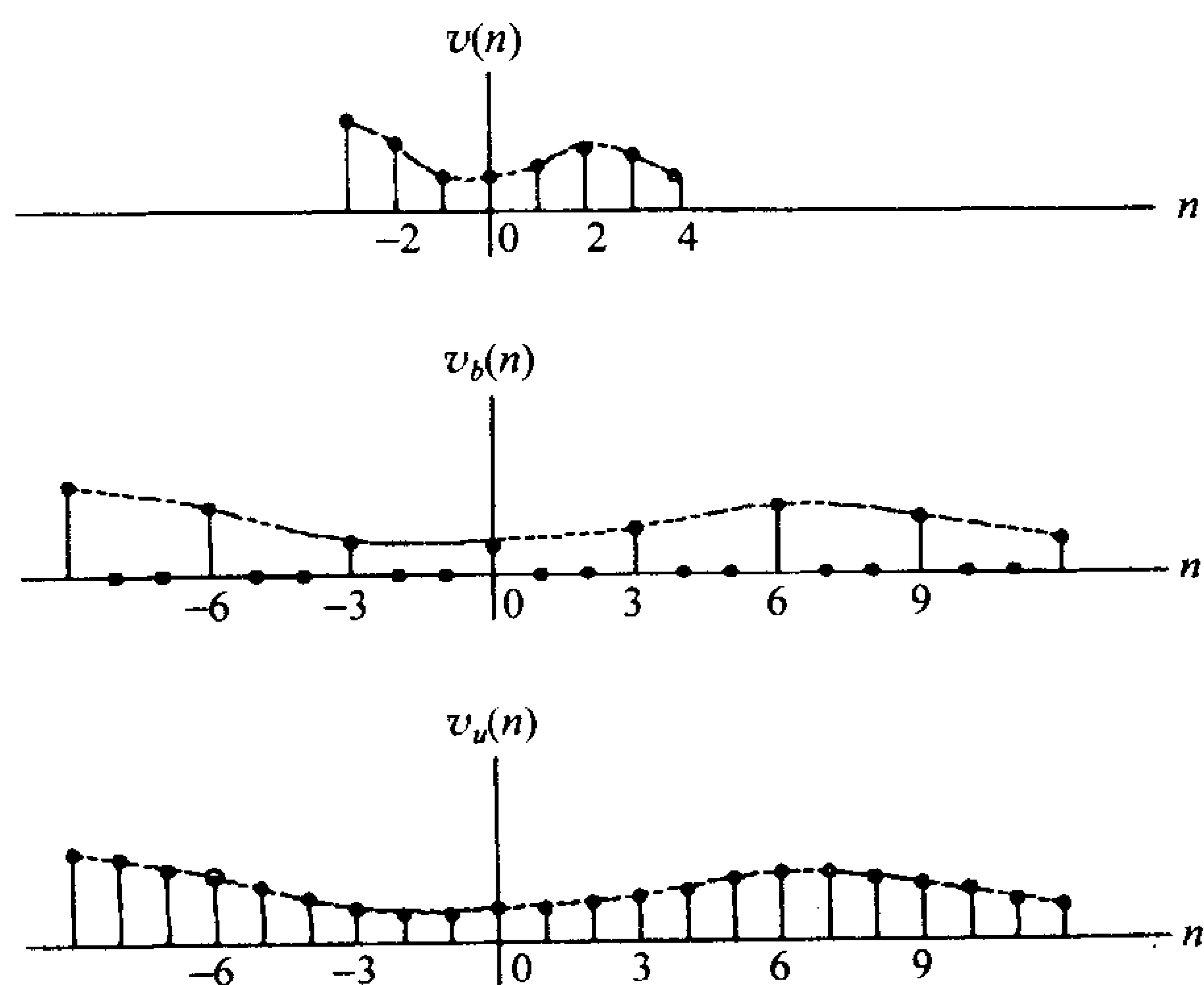


图 6-12 上采样过程

这里 $v_b(n)$相当于时间膨胀性质中的 $v_\ell(n)$，其中 $\ell=U$. 于是，我们得到 $v_b(n)$的傅里叶变换为

$$V_b(\Omega)=V(U\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nU\Omega}$$

图 6-13 所示为图 6-12 中信号对应的谱，其中原始信号的谱为 $V(\Omega)$. 因为 $v_b(n)$是在每两个样本之间插入 2 个零点得到的，因此，时间尺度按因子 3 膨胀，频率尺度按因子 3 缩小，从而得到图 6-13 所示的 $V_b(\Omega)$. 再经过低通滤波器消除“额外”的谱分量，得到 $V_u(\Omega)$. 滤波器的带宽不大于 π/U.

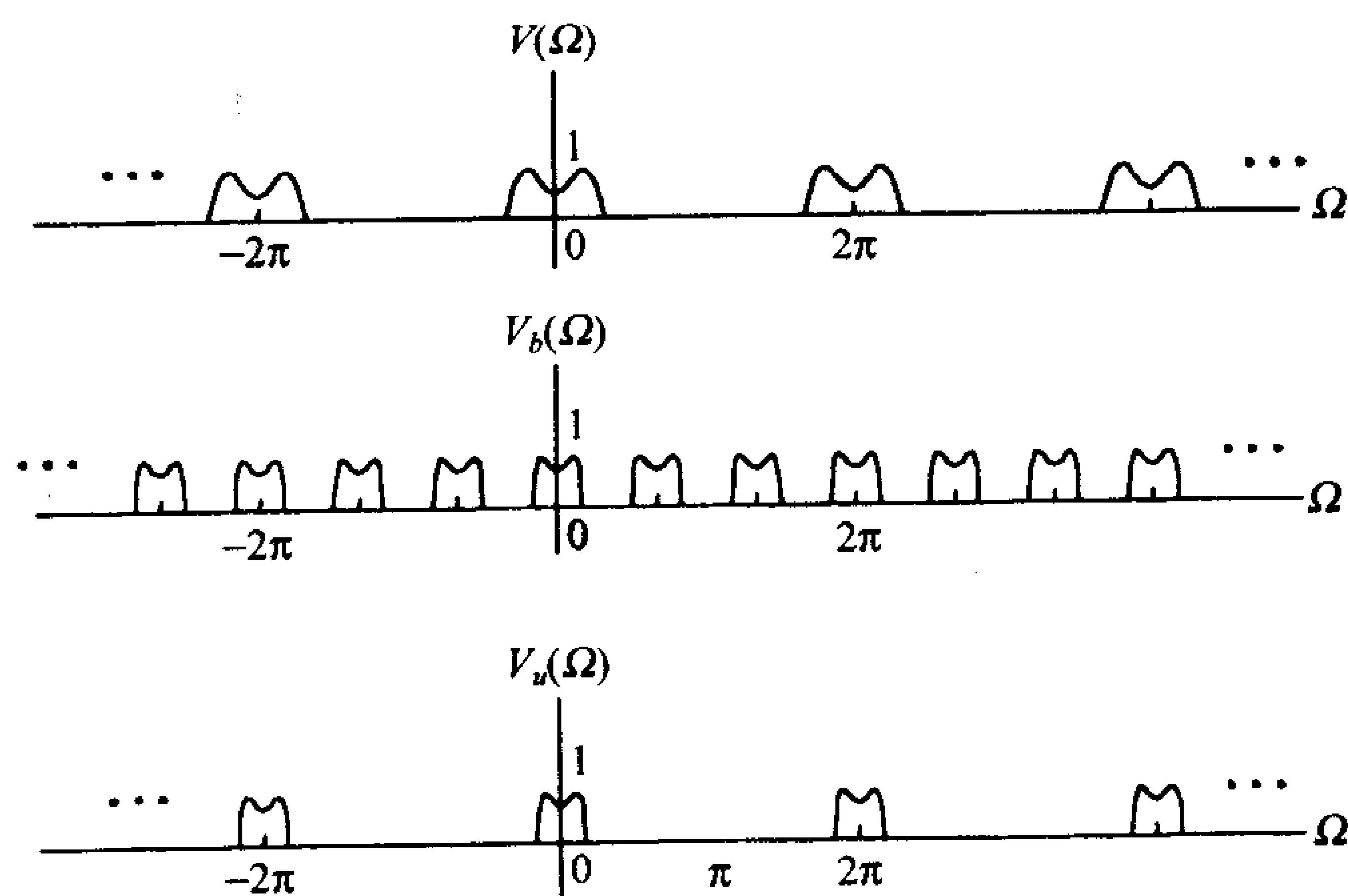


图 6-13 图 6-12 中信号的谱

6.3 分数采样率改变

因子为 U 的上采样过程与因子为 D 的下采样过程可以结合在一起形成一个以 U/D 为因子改变采样率的采样过程.

$$r_s' = \frac{U}{D} r_s \tag{6-9}$$

图 6-14 所示为先进行上采样，再进行下采样的过程. 在上下采样之间串联地设置了两个低通滤波器. 由于两个滤波器都是低通的，所以它们可以由一个带宽为 π/M 的滤波器代替，其中 π/M 为 π/D 与 π/U 的最小值. 改变采样率的过程包括上采样、低通滤波和下采样三个子过程.

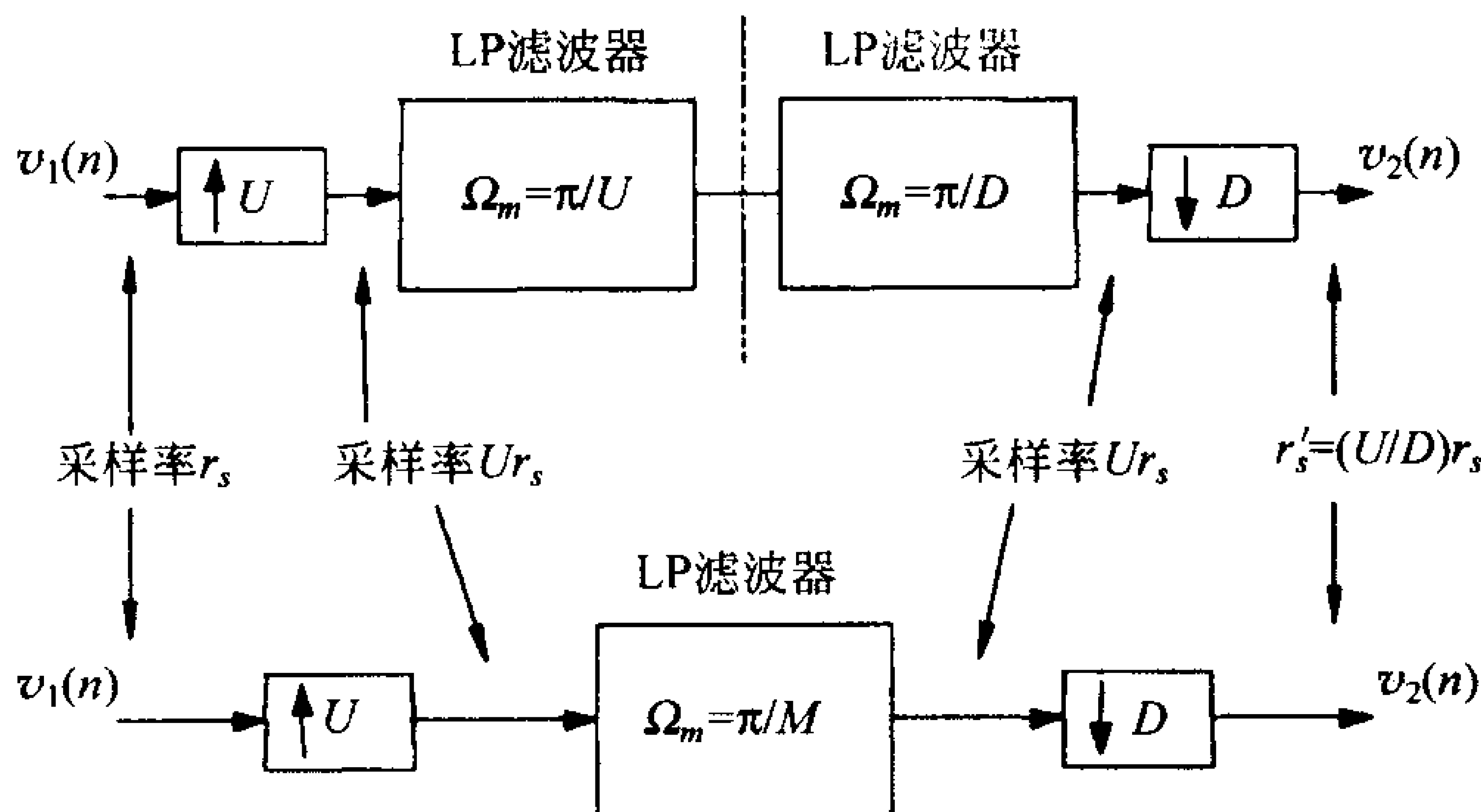


图 6-14 用一个滤波器替换两个滤波器示意图

例 6.3 许多音频系统被设计成既能播放 CD 又能播放数字磁带，这样的设备需要在不同的采样率下工作. CD 和数字磁带的采样率分别为

$$r_{CD} = 44.1(10)^3 \quad 样本/秒$$

$$r_{DAT} = 48(10)^3 \quad 样本/秒$$

我们希望设计一个数字放大器来处理这些不同采样率的信号. 设计原则是使放大器具有尽可能高的保真度. 系统需要在磁带播放器的高采样率下工作，而不是在 CD 播放器的低采样率下工作. 求比值 U/D 能够将 CD 信号的低采样率变换为与磁带播放器相同的高采样率.

解 由于 48/44.1=1.088 46. 为了找到两个整数使得它们的比尽可能接近这个比值，我们尝试采用下面的整数比.

$$49/45 = 1.088\,89 \quad 50/46 = 1.086\,96 \quad 99/91 = 1.087\,91$$

使用大的分子和分母得到的比值较接近正确的比值 1.088 46. 然而，即使我们使用较小数字的比值 50/46=25/23，其分子和分母的数值对应用来说仍然太

103～105

大. 使用该数值，我们要先将采样率增加25倍，然后再减小23倍. 这时低通滤波器的带宽应为$\pi/25$，这是一个很苛刻的要求. 此时，我们近似地有

$$\frac{U}{D}=\frac{25}{23}=1.08696$$

系统示意图如图6-14所示，其中的$M=25$. 显然，这时的采样率为$(25/23)\times 44.1=47.93$，比要求的采样率低一点点. 这个时候，帕瓦罗蒂的声音听起来有点像唐老鸭. ■

在实际应用中，我们可以分多级来改变采样率，以消除对滤波器带宽的严格限制. 例如，要改变采样率$48/44.1=1.08846$，可用3个近似的比值.

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=1.0800$$

尝试更多这样的小整数的比值组合还可以得到更好的近似值. 例如我们把9/10替换为(3/5)(3/2)，就可以将原来的3级采样率变为5级采样率. 也就是用5级采样率来实现整个系统的比值为1.08的采样率改变，此时图6-14中M的最大值等于5. 这样做是有所得也有所失的，究竟作何取舍，取决于个人的意愿.

106

下采样和上采样对于小波的理解是很重要的概念. 下面给出3个例子，MATLAB程序的运行结果揭示了相关信号中的频率含量.

例6.4 求出并比较图6-15中4个信号的频率含量.

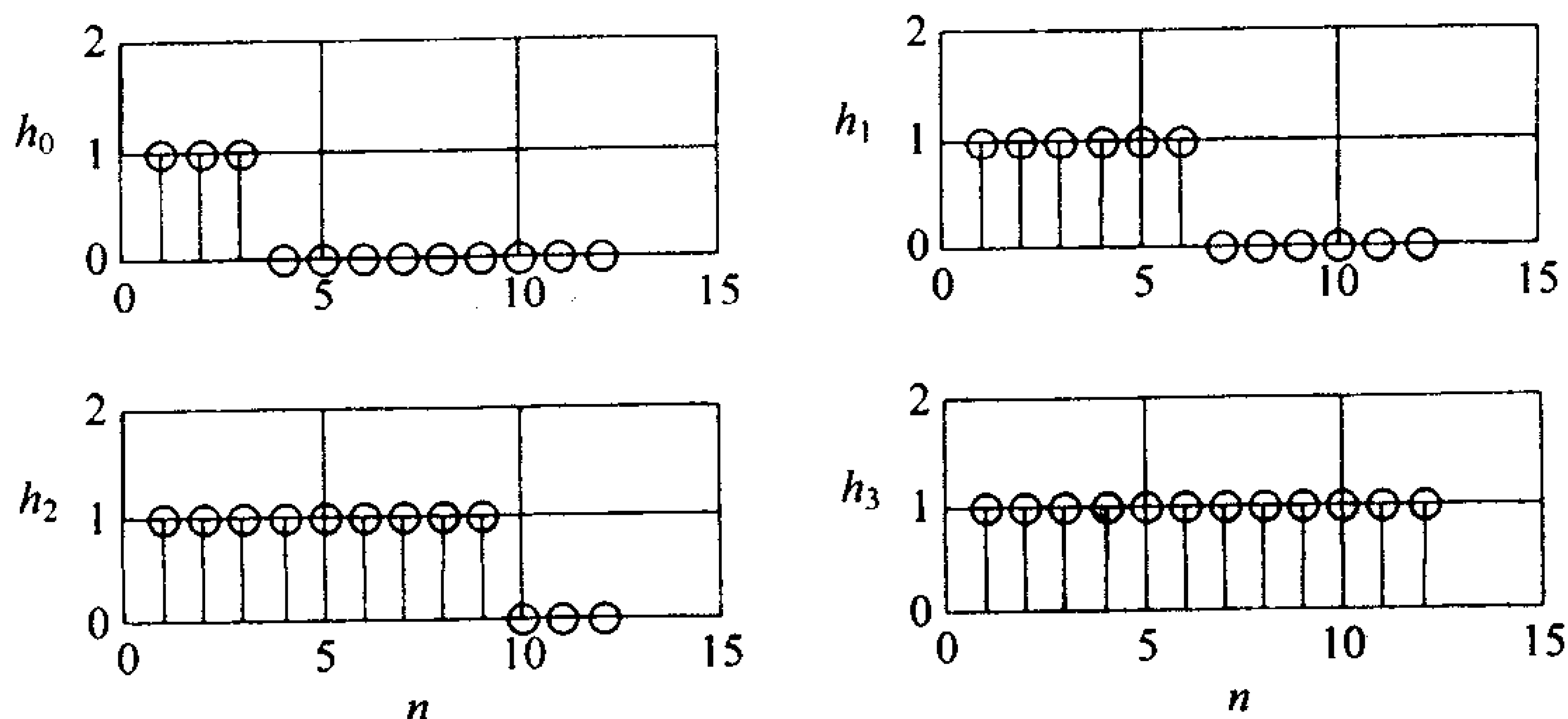


图6-15 例6.4的4个信号

解 下面的MATLAB程序的第一段产生信号h_0，h_1，h_2，h_3. 接下来的程序段计算当Ω取$(0,\pi)$之间的100个值时h_0的傅里叶变换并画出其振幅谱.

```
N=12;
M=3;
h0=[ones(1,M)  zeros(1,N-M)];
M=6;
h1=[ones(1,M)  zeros(1,N-M)];
M=9;
h2=[ones(1,M)  zeros(1,N-M)];
M=12;
h3=ones(1,M);
```

计算并画出 h_0 的傅里叶变换如图 6-16 的第 1 个图所示，记为 H0.

```
w=linspace(0,pi);
s=zeros(size(w));
for n=1:N
  k=n-1;
  s=s+h0(n)*exp(-j*w*k);
end
H0=abs(s);
subplot(4,2,1)
plot(w,H0)
ylabel('H0')
```

107

对 h_1，h_2，h_3 重复以上程序，结果示于图 6-16.

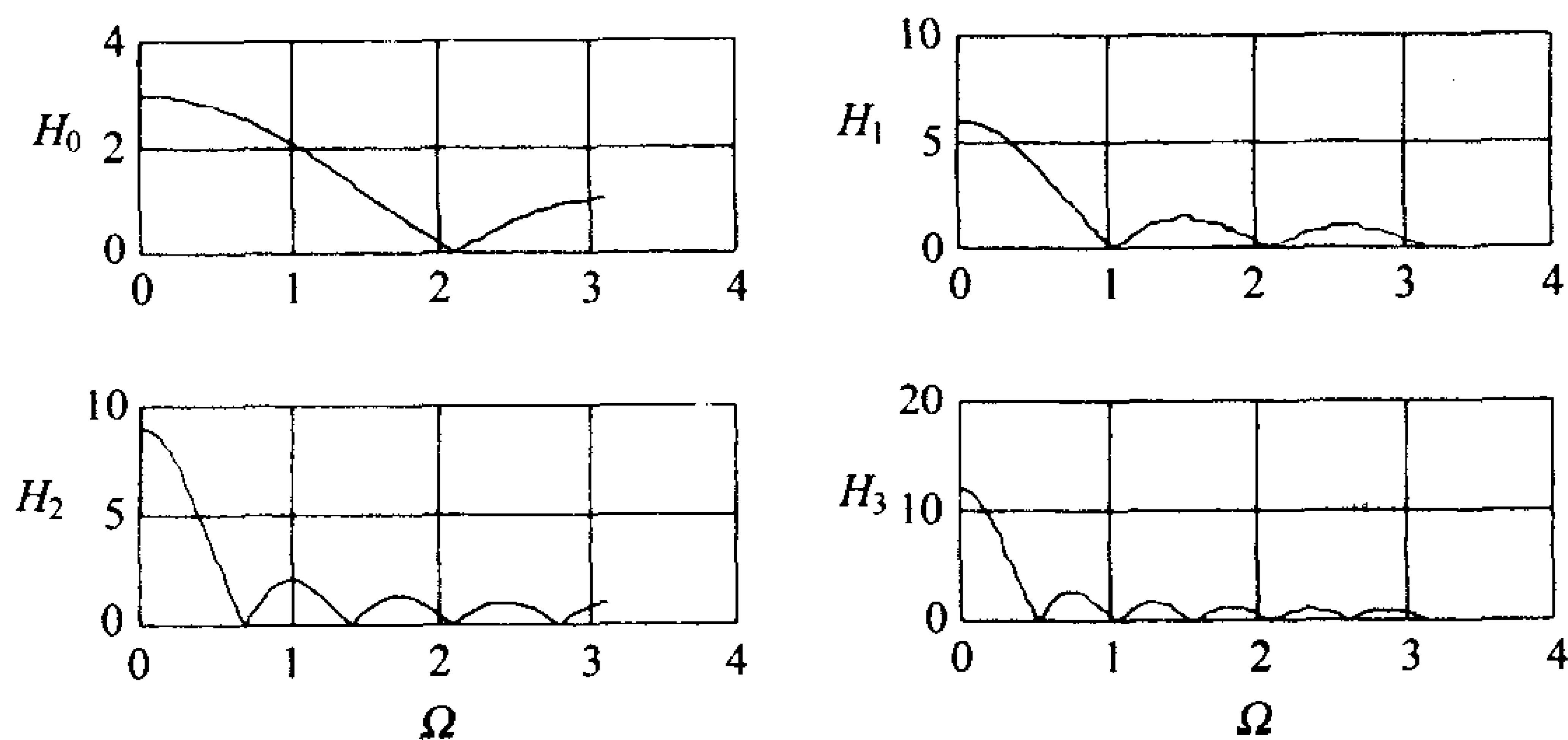


图 6-16　图 6-15 中 4 个信号的频率含量 ■

例 6.5(抽选，decimation)　本例说明用零点替换某些样本对信号的影响. 图 6-17 中 h_0 是原始信号，由 12 个样本组成(使用 12 个样本是因为 12 能被 2，3 和 6 整除)，h_1，h_2，h_3 是去掉某些样本之后的信号. 图 6-18 所示为这 4 个信号的频率含量. 其 MATLAB 程序与例 6.4 中的程序类似. ■

例 6.6(插值，interpolation)　本例说明在样本间插入若干零点对信号的影响. 在样本间插入若干零点是插值的中间步骤. 图 6-19 是一个包含三个样本的信号. 我们在每两个样本间分别插入 1，2，3 个零点. 图 6-20 所示为对应信号的频率含量. ■

108

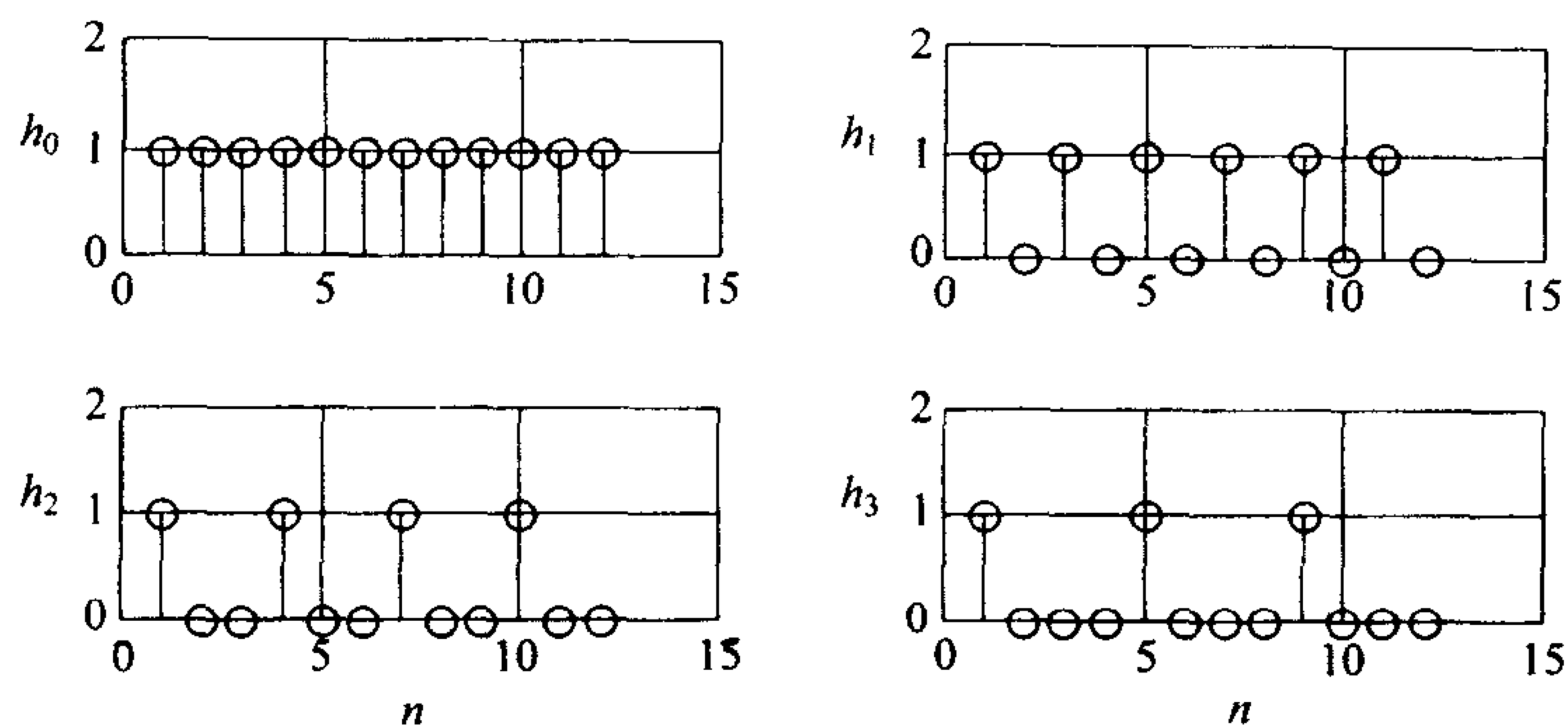


图 6-17 例 6.5 中的 4 个信号

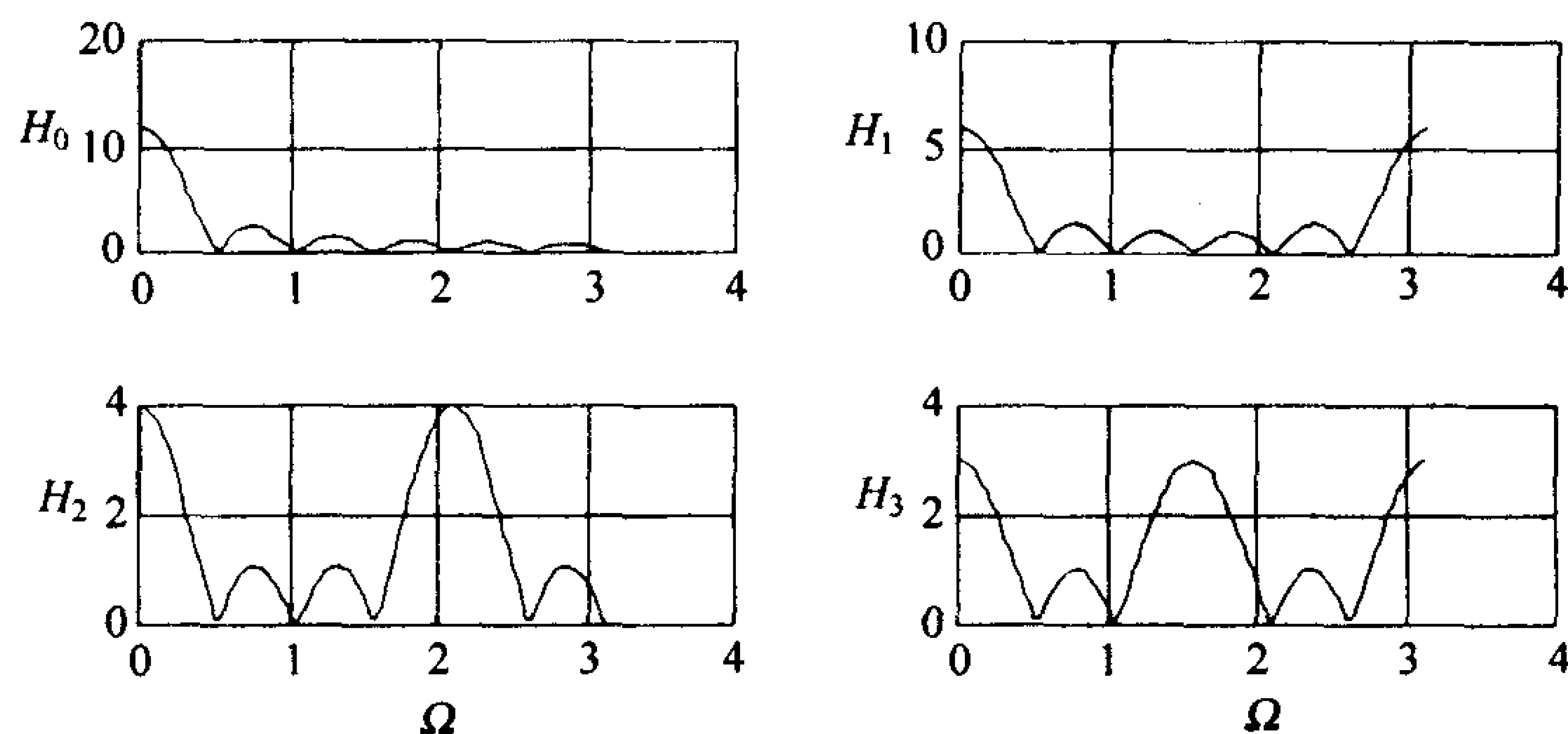


图 6-18 图 6-17 中 4 个信号的频率含量

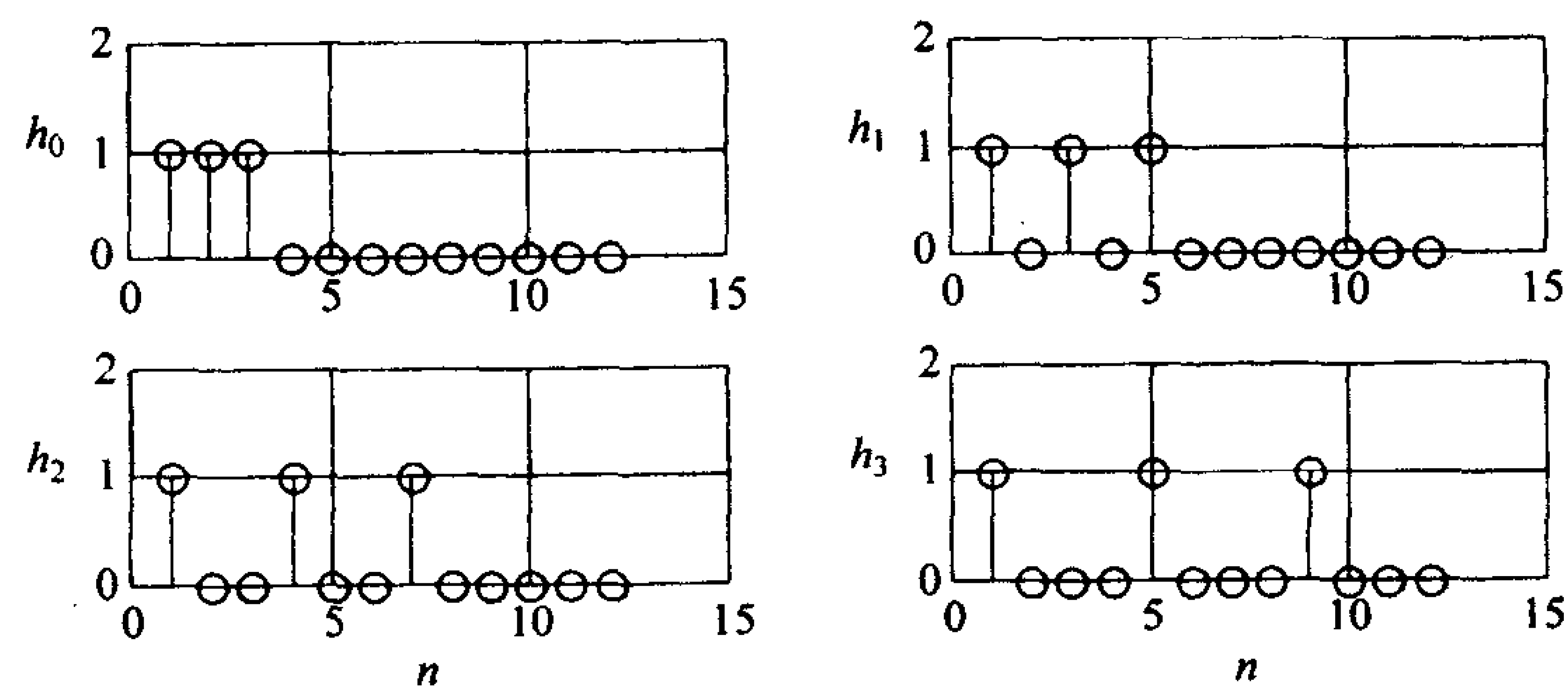


图 6-19 插值示意图

请注意这些信号的频率含量的相似性和区别. 在图 6-15 和图 6-16 中，信号在时域的长度决定了频率表示的宽度，这揭示了时-频对偶关系. 在图 6-17 中，原始信号长度为 12，交替插入若干零点后得到另外 3 个信号，它们的谱如图 6-18 所示. 图 6-19 和图 6-20 与前两个例子情况类似，唯一的区别是这个例子从头到尾只用了 3 个样本. 从这些图我们看到，图 6-18 和图 6-20 的区别只在于所使用

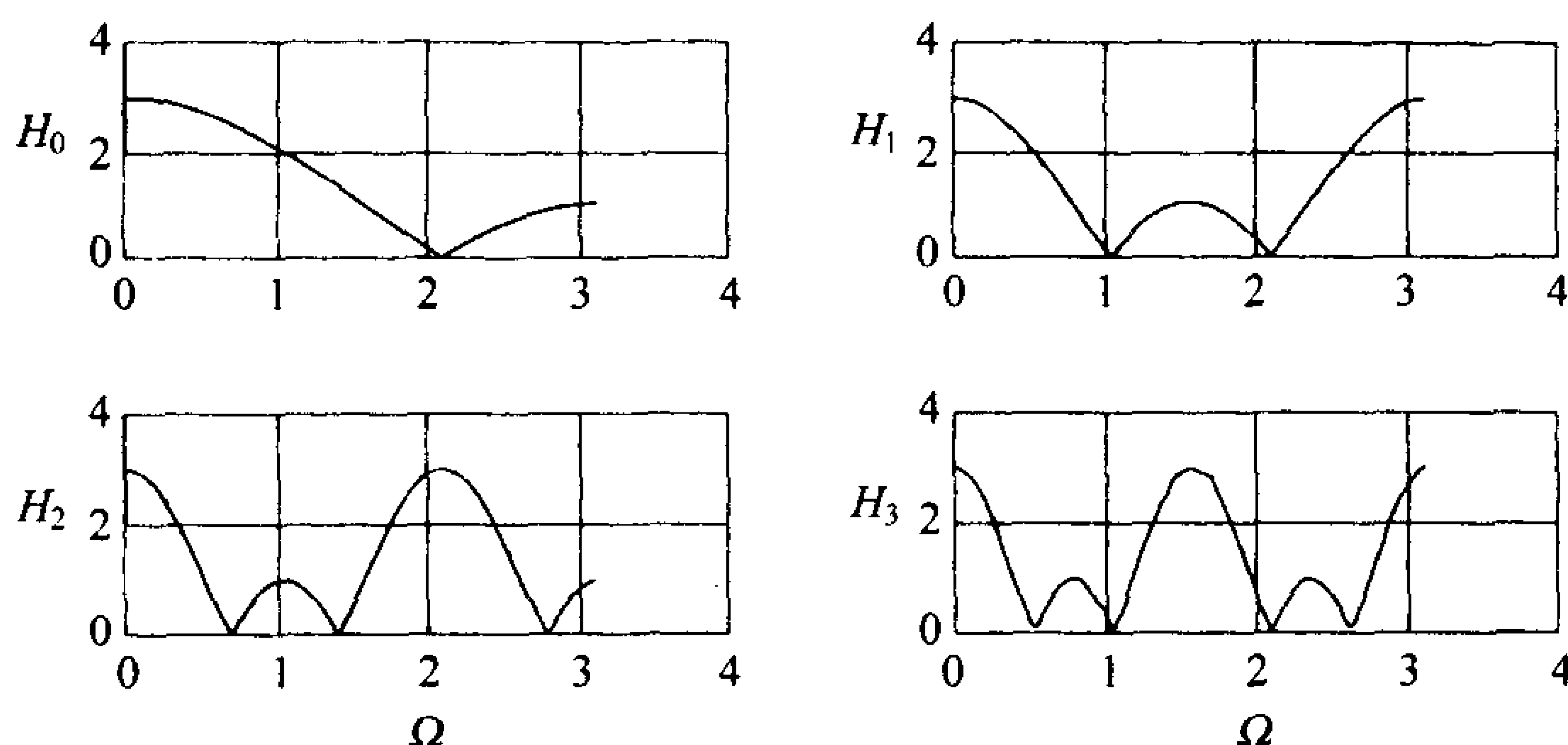


图 6-20 插值信号的频率含量

的样本个数不同. 这些图为我们比较插入不同个数的零点带来的影响提供了基础.

6.4 下采样与相关

与其他任何事情一样，一旦我们知道了如何对下采样(或上采样)的信号进行相关或卷积运算，运算本身就容易了. 本节就来说明如何进行这些运算. 我们先讨论相关运算. 图 6-21 是一个相关运算后跟一个下采样的示意图. 我们知道，与函数 $h(n)$作相关运算等价于与 $h(-n)$作卷积. 因此，信号与 $h(n)$作相关运算可以描述为用 $h(-n)$对信号进行滤波. 相关运算的定义如下.

109 ~ 110

$$v(n) = \sum_k x(k)h(k-n) \tag{6-10}$$

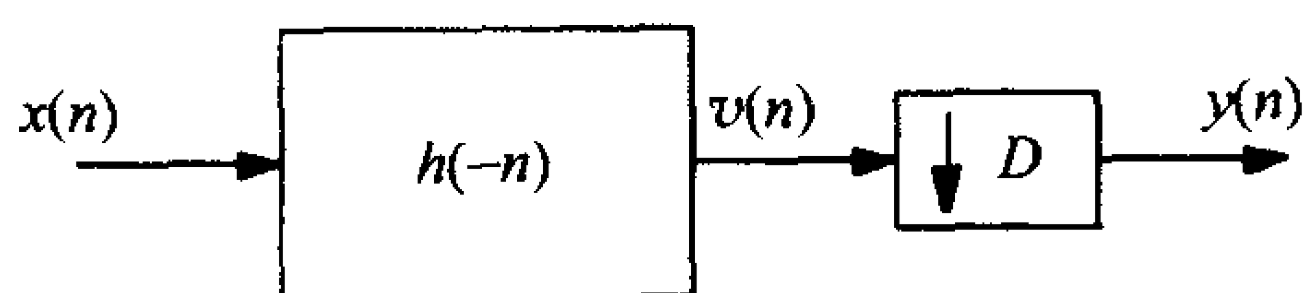


图 6-21 相关运算后跟一个下采样的示意图

例 6.7 图 6-22 所示为脉冲响应 $h(n)$与信号 $x(n)$. 使用式(6-10)求$v(n)$，然后对其按 2 下采样求 $y(n)$.

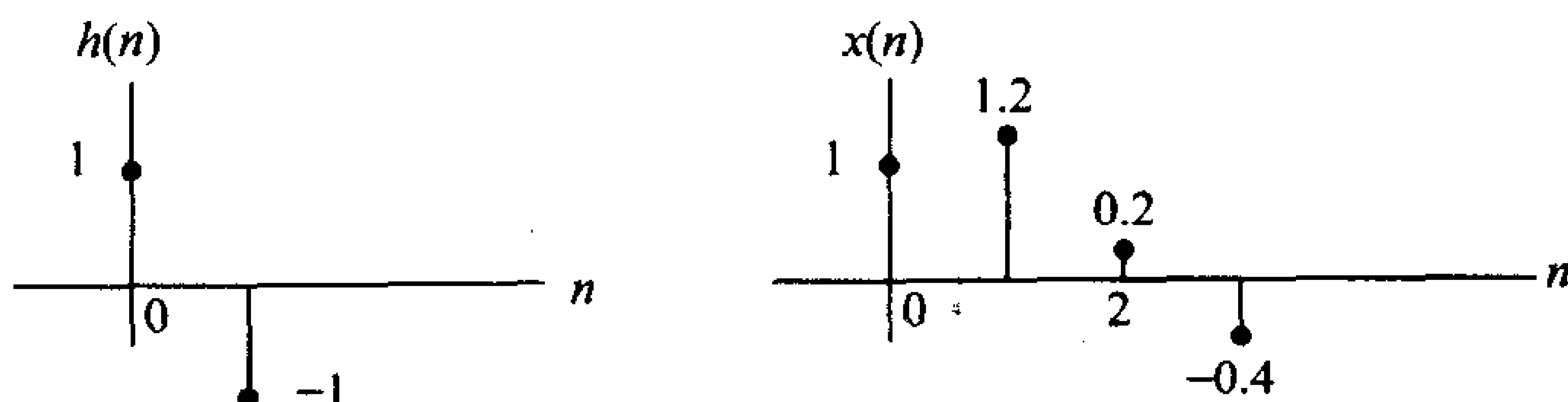


图 6-22 脉冲响应信号 $h(n)$与输入信号 $x(n)$

解 图 6-23a 是 $x(n)$与 $h(n)$作相关运算以后的结果. 按 2 对该结果作下采

样，选择 $v(n)$的偶数下标分量，形成 $y(n)$，如图 6-23b 所示.

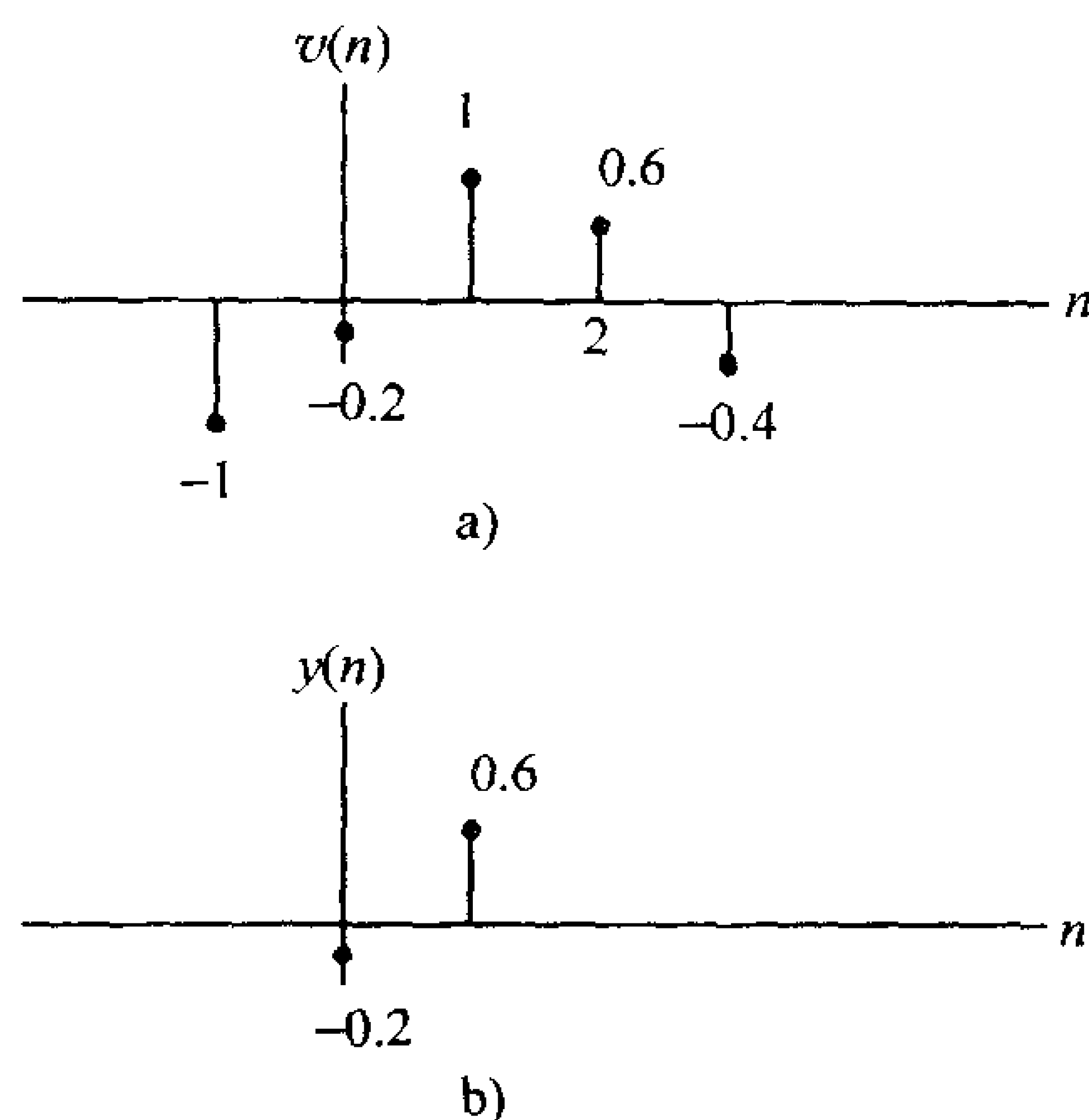


图 6-23 所求得的 $y(n)$ ■

本例的目的之一是说明对信号作相关运算后再作下采样，这两个运算可以合并成一个方程.

$$y(n) = \sum_k x(k)h(k - Dn) \tag{6-11}$$

上式把图 6-21 中的两个运算统一了起来. 图 6-24 所示是用方程(6-11)重新对例 6.7 作运算的过程. 可以看到，按 k 对乘积 $h(k)x(k)$求和，结果为 $y(0)=-0.2$. 类似地，按 k 对乘积 $h(k-2)x(k)$求和，结果为 $y(1)=0.6$.

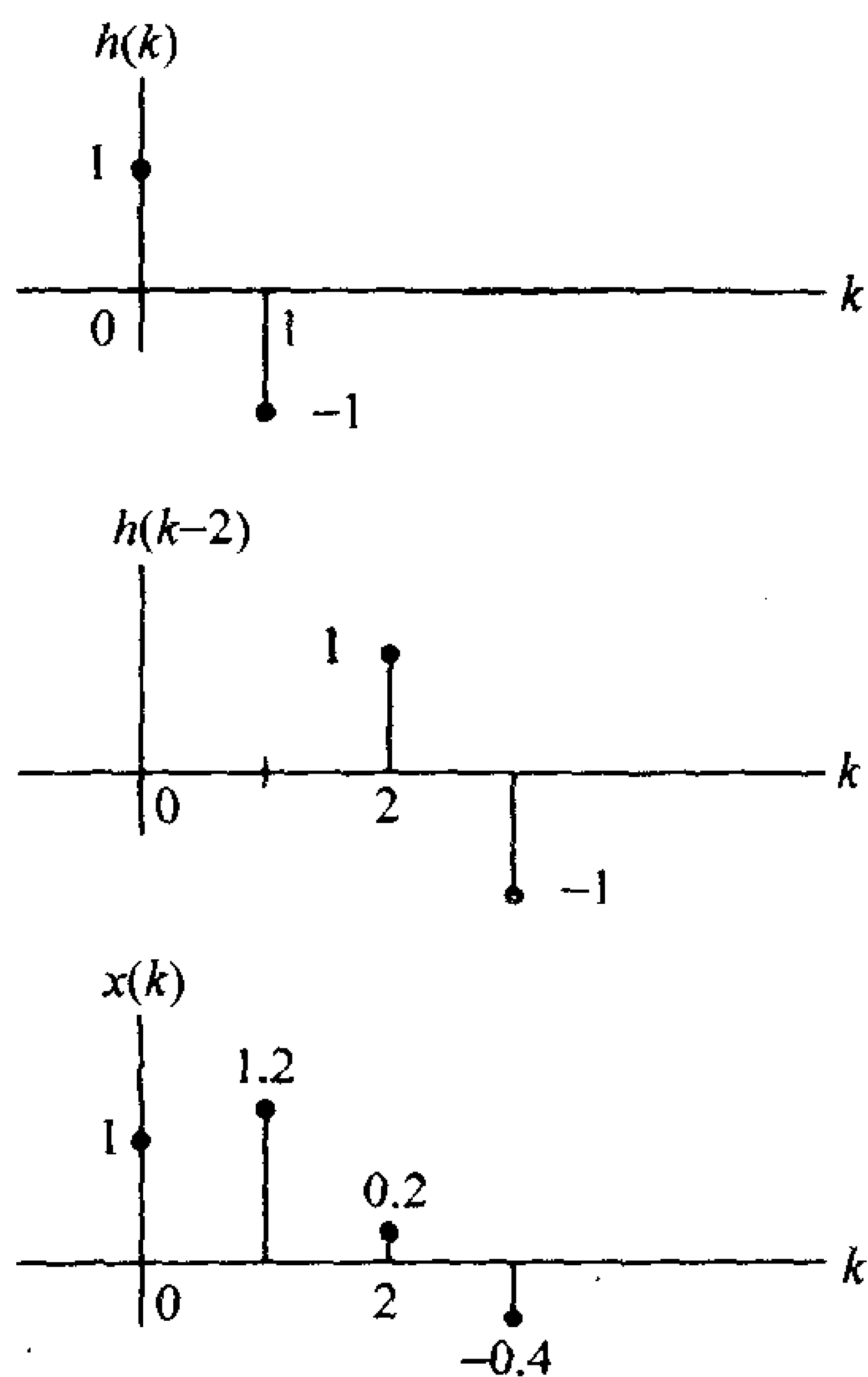


图 6-24 方程(6-11)的示意图

111
~
112

下面两个方程与小波系数 $c_j(k)$ 和 $d_j(k)$ 相关，我们将在第 10 章中推导.

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \qquad k \geqslant 0 \tag{6-12}$$

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m) \qquad k \geqslant 0 \tag{6-13}$$

这两个方程说明，对于给定的序列 h_0 和 h_1，能够从一个给定的序列 c_{j+1} 开始，推导出另外的两个序列 c_j 和 d_j. 虽然现在还看不出这有什么意义，但是我们后面就会知道这对于小波的研究是很重要的. 现在我们先给出一个例子来说明如何使用这两个方程.

例 6.8 设 c_2，h_0，h_1 如下，请推导出 c_1，d_1，c_0，d_0.

$$c_2 = [0.8183 \quad 0.8183 \quad 0.1817 \quad 0.1817]$$

$$h_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad h_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

解 先由式(6-12)推出序列 c_1. 图 6-25 给出了 $c_2(m)$，$h_0(m)$ 和 $h_0(m-2)$. 令式(6-12)中的 $k=0$，计算和式，得

$$c_1(0) = \sum_m h_0(m)c_2(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}[0.8183 + 0.8183] = 1.1573$$

接下来令 $k=1$，得

$$c_1(1) = \sum_m h_0(m-2)c_2(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}[0.1817 + 0.1817] = 0.2570$$

类似地，可以求得 d_1 序列如下

$$d_1(0) = \sum_m h_1(m)c_2(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}[0.8183 - 0.8183] = 0$$

$$d_1(1) = \sum_m h_1(m-2)c_2(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}[0.1817 - 0.1817] = 0$$

最后，得

$$c_0(0) = \sum_m h_0(m)c_1(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}[1.1573 + 0.2570] = 1$$

$$d_0(0) = \sum_m h_1(m)c_1(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}[1.1573 - 0.2570] = 0.6366$$

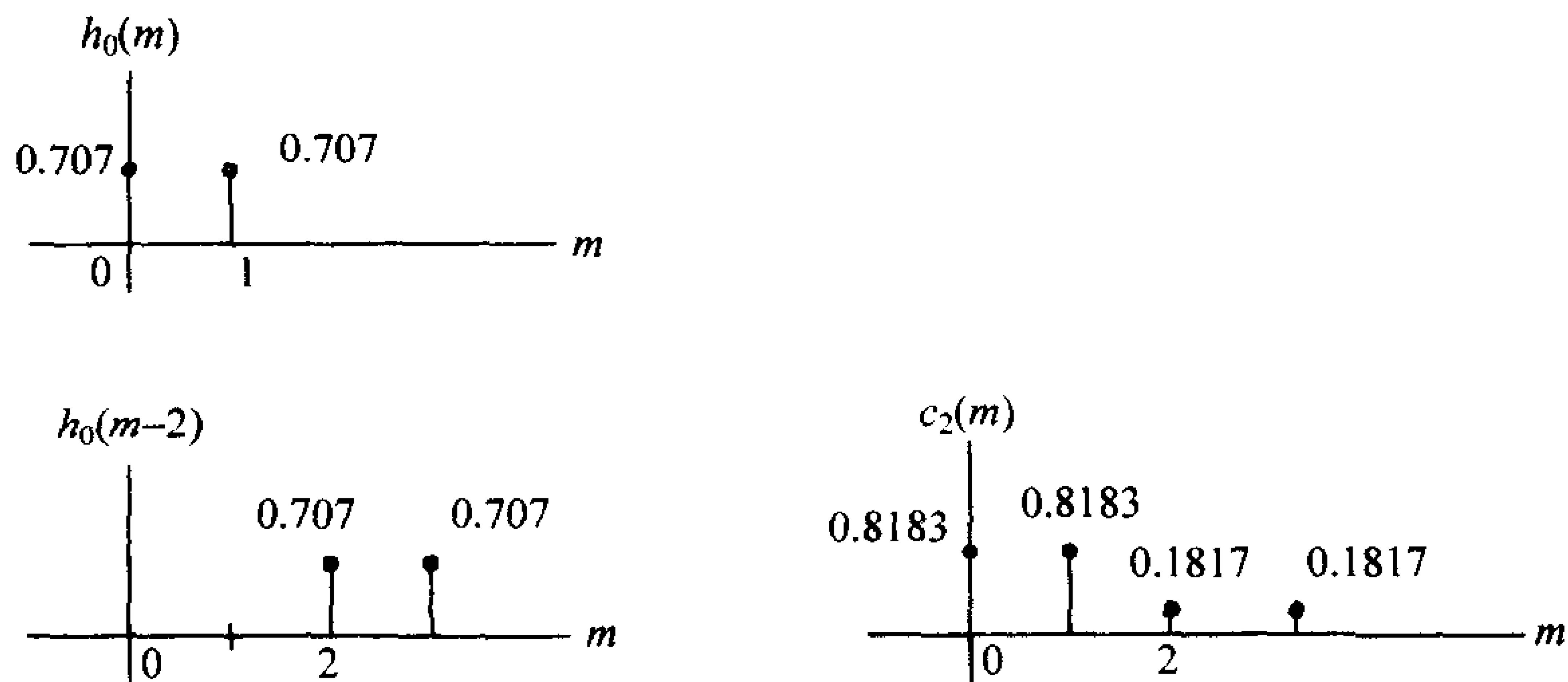


图 6-25 函数 $h_0(m)$，$h_0(m-2)$和 $c_2(m)$ ■

注意，在本例中我们是从长度为 4 的序列 $c_2(m)$开始的. 在做完相关运算和下采样之后，结果序列 $c_1(m)$的长度为 2，再进行一次相同的运算后结果序列的长度减至 1. 还要注意，从 c_{j+1}推导 c_j 的过程等价于对 c_{j+1}进行滤波然后再作下采样的过程. 与 $h(m)$作相关运算等价于与 $h(-m)$作卷积. 因此，可以将式(6-12)与式(6-13)描述为一个先进行滤波后作下采样的过程，如图 6-26 所示.

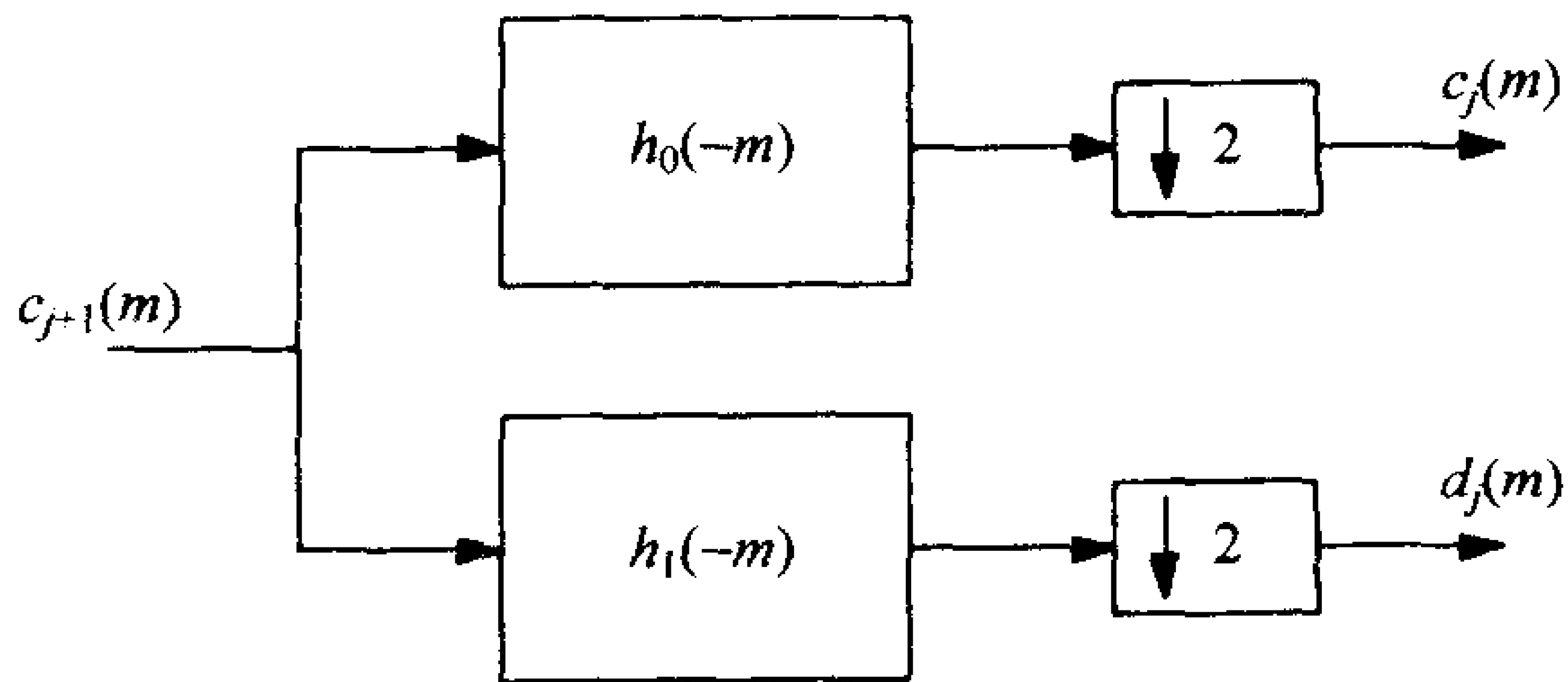


图 6-26 式(6-12)与式(6-13)的先滤波后下采样过程

113～114

例 6.9 设 c_3，h_0 和 h_1 如下所列，试推导出 c_2 和 d_2.

$$c_3 = [4,5,-4,12,-5,11,-2,1]$$

$$h_0 = [3,5,1,-0.5]$$

$$h_1 = [-0.5,-1,5,-3]$$

解 将 h_0 与 c_3 作相关运算，得

$$h_0 \otimes c_3 = \underset{-3}{[-2} \quad \underset{-2}{1.5} \quad \underset{-1}{27} \quad \underset{0}{27} \quad \underset{1}{9.5} \quad \underset{2}{37.5} \quad \underset{3}{23} \quad \underset{4}{37.5} \quad \underset{5}{24} \quad \underset{6}{-1} \quad \underset{7}{3]}$$

其中，相关值下方的小号下标数字表示时间. 设 $h_0(n)$和 $c_3(n)$从 $n=0$ 开始，它们的相关运算将从 $n=-3$ 开始，到 $n=7$ 结束. 为了确定 c_2，我们从 $n=0$ 开始选取偶数项，从而有

$$c_2 = [27 \quad 37.5 \quad 37.5 \quad -1]$$

类似地，将 h_1 与 c_3 作相关运算后下采样得

$$h_1 \otimes c_3 = [-12 \quad 5 \quad 33 \quad -63 \quad 76.5 \quad -68 \quad 60 \quad -21.5 \quad 1.5 \quad 0 \quad -0.5]$$

从 $n=0$ 开始选取偶数项得

$$d_2 = [-63 \quad -68 \quad -21.5 \quad 0]$$ ■

练习 6.2 给定

$$h_0 = \{1,1,-1,-1\}$$

$$h_1 = \{-1,1,1,-1\}$$

$$c_3 = \{1,2,1,0,-1,1,0,1\}$$

求 c_2 和 d_2.

答案： $c_2=\{2, 1, -1, 1\}$，$d_2=\{2, -3, 1, 1\}$.

115

6.5 上采样与卷积

图 6-27 是按 U 作上采样后，再作一次滤波运算的示意图．先对 $x(n)$ 作上采样得到 $v(n)$，再将 $v(n)$ 与 $h(n)$ 作卷积得到 $y(n)$．在进一步讨论之前，先用一个例子来说明图 6-27 所示的运算．

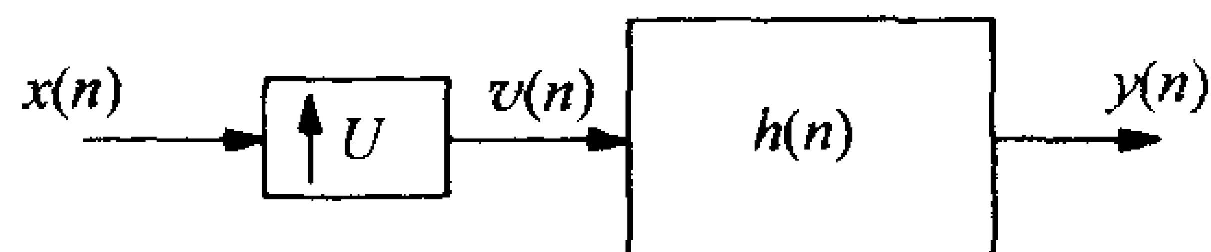


图 6-27 上采样与卷积

例 6.10 图 6-28 所示为 $x(n)$ 与 $h(n)$．令 $U=2$，执行图 6-27 所示的运算求 $y(n)$．

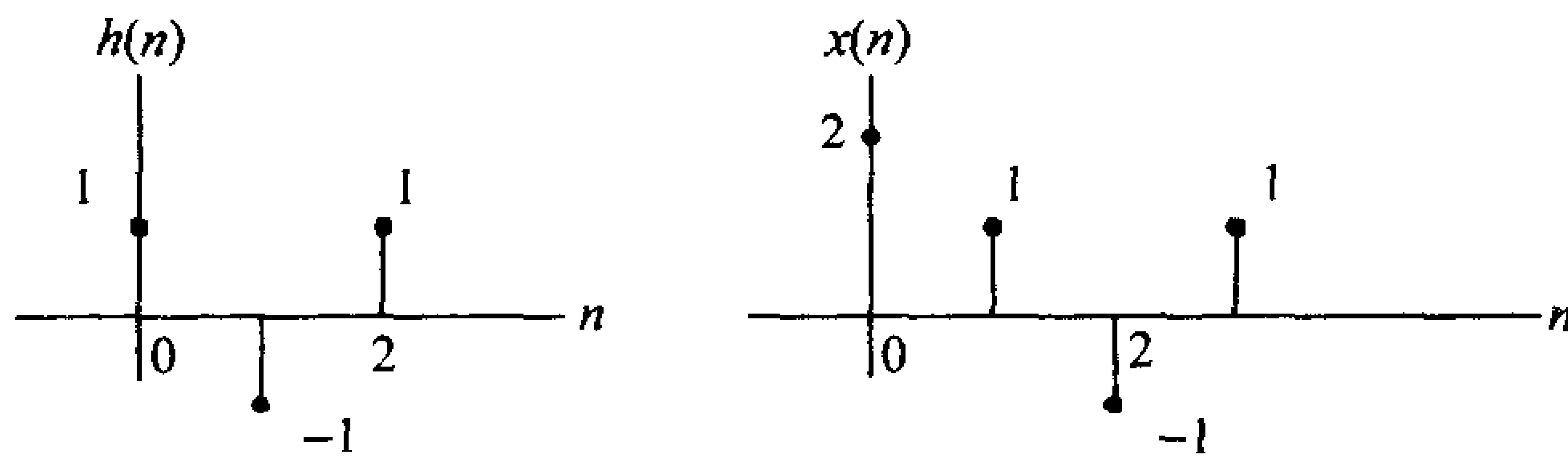


图 6-28 例 6.10 中的函数

解 图 6-29a 所示为对 $x(k)$ 按 2 进行上采样所得到的 $v(k)$，即每间隔一个

样本插入一个零点．然后，按下式求 $v(k)$ 与 $h(k)$ 的卷积．

$$y(n) = \sum_k h(n-k)v(k)$$

得到 $y(n)$，如图 6-29c 所示．

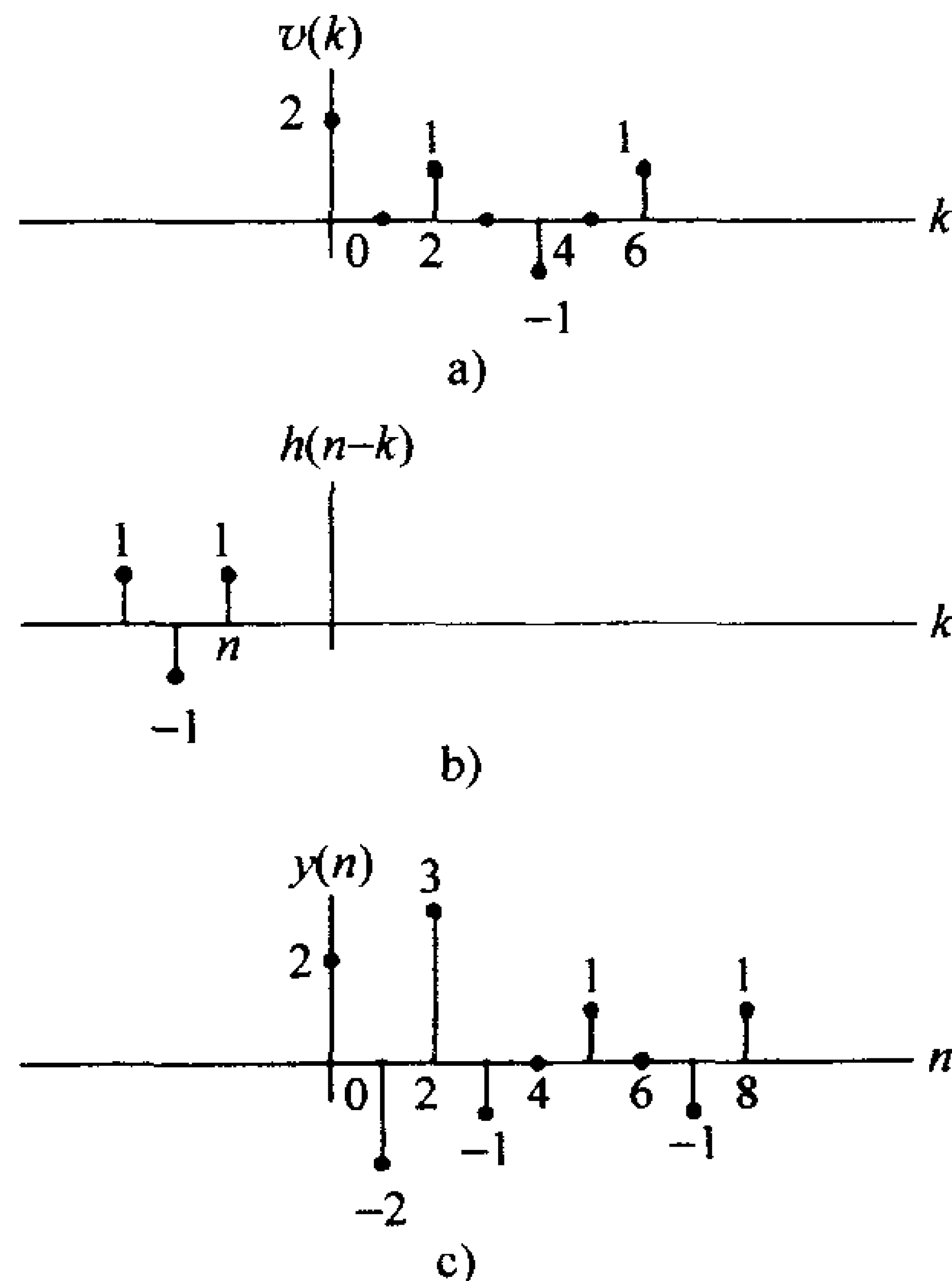


图 6.29 上采样后再作卷积

■

这个例子包含了按 U 上采样和与 $h(n)$ 作卷积两个步骤．由于某些原因（我们将在有关小波的章节中予以解释），我们希望把这两个运算整合到一个表达式中，得到如下这个公式．

$$y(n) = \sum_k h(n-Uk)x(k) = \sum_\lambda h(\lambda)x\left(\frac{n-\lambda}{U}\right) \tag{6-14}$$

其中的第二个和式是通过变量替换 $\lambda=n-Uk$ 或 $k=(n-\lambda)/U$，由第一个和式推导出来的．下一个例子将表明，把这两个运算整合成一个表达式会使问题更加复杂．

例 6.11 对于图 6-28 中的函数以及 $U=2$，使用式(6-14)求 $y(n)$．

解 试图通过画图来说明式(6-14)将会遇到一些实际的困难．因此，在尝试画图之前，我们先用另一个较为简单的方法，即计算式(6-14)对应于某个 n 的值．先令 $n=0$，式(6-14)变为

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_k h(-Uk)x(k) \\ &= \cdots + \underbrace{h(2)x(-1)}_{k=-1} + \underbrace{h(0)x(0)}_{k=0} + \underbrace{h(-2)x(1)}_{k=1} + \underbrace{h(-4)x(2)}_{k=2} + \cdots \end{aligned}$$

上式中，唯一的非零项是 $h(0)x(0)=2$．类似地，令 $n=1$，由式(6-14)得

$$y(1) = \cdots + \underbrace{h(3)x(-1)}_{k=-1} + \underbrace{h(1)x(0)}_{k=0} + \underbrace{h(-1)x(1)}_{k=1} + \underbrace{h(-3)x(2)}_{k=2} + \cdots$$

表达式中唯一的非零项为 $h(1)x(0)=-2$. 继续这一过程，令 $n=2$，有

$$y(2)=\cdots+\underbrace{h(4)x(-1)}_{k=-1}+\underbrace{h(2)x(0)}_{k=0}+\underbrace{h(0)x(1)}_{k=1}+\underbrace{h(-2)x(2)}_{k=2}+\cdots$$

其中有两个非零项 $h(2)x(0)+h(0)x(1)=3$.

简单地平移、相乘、相加，直到 $h(n-k)$ 最大的负指数项平移过 $v(k)$ 最大的正指数项为止. 任何试图通过画图来说明式(6-14)中的运算都会在某些方面遇到困难. 图 6-30 是这种尝试的一个示意图. 图中 $x(k)$ 的采样间隔是 $h(n-2k)$ 的采样间隔的 2 倍. 然而，当 n 增加时，将函数 $h(k)$ 按底部尺度平移 1 步(相对于常数 n，见图 6-30 最下面的图)只相当于将它按顶部的尺度平移 1/2 步(相对于常数 k，见图 6-30 顶部的图). 这是一个正确的然而多少有些不令人满意的图示过程.

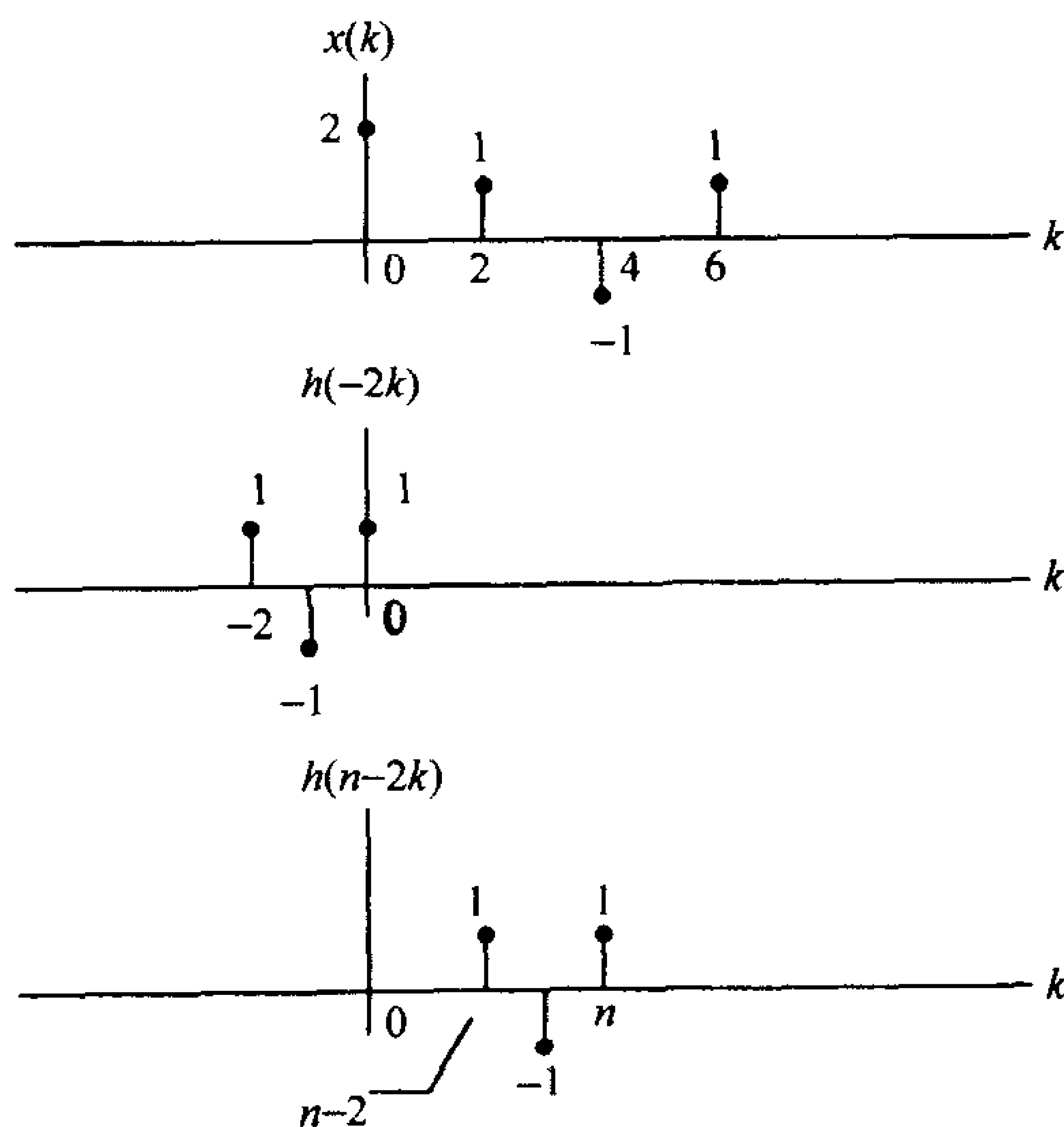


图 6-30 图示式(6-14)的尝试

■

练习 6.3 给定两个序列

$$h(n)=\{1,1,-1,-1\}$$

$$x(n)=\{1,2,1,0,-1,1\}$$

按 $U=3$ 上采样 $x(n)$，然后与 $h(n)$ 作卷积求 $y(n)$.

答案：$y(n)=[1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 2,\ -2,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 1,\ 2,\ 1,\ -1,\ -1]$.

例 6.12 作相关运算后按 2 下采样，与按 2 上采样后作卷积运算，是小波中要用到的两个处理过程. 注意它们的顺序：相关运算在前，下采样在后；上采样

在前，卷积在后．设信号 $x(n)$ 与滤波器 $h(n)$ 为

$$x(n)=\{-1\quad 0\quad 1\quad 3\quad 1\quad -1\}$$

$$h(n)=\{1\quad -1\quad 0\quad 1\}$$

(a)作相关运算以后再作下采样，求 $y_1(n)$．$y_1(n)$包含多少个样本？

116 ~ 119

(b)上采样以后作卷积运算，求 $y_2(n)$．$y_2(n)$包含多少个样本？

解　(a)因为 x 有 6 个样本，因此 y_1 将有 3 个样本．将 x 与 h 作相关运算，结果为

$$(h\otimes x)(n)=\left\{\underbrace{-1\quad 0\quad 2\quad \underset{\uparrow}{2}\quad 0\quad -\underset{\uparrow}{3}\quad \underset{\uparrow}{2}\quad 2\quad -1}\right\}$$

其中箭头所指为 $y_1(n)$ 中的 3 个样本．

(b)y_2 中应有 12 个样本．对 $x(n)$ 按 2 上采样得到 12 个样本，再与 $h(n)$ 作卷积运算得到 15 个样本．

$$\{-1\quad 1\quad 0\quad -1\quad 1\quad -1\quad 3\quad -2\quad 1\quad 2\quad -1\quad 2\quad 0\quad -1\quad 0\}$$

120

前 3 个样本为信号中的暂态部分，应去掉．所以，$y_2(n)$为后面的 12 个值．■

第7章　快速傅里叶变换

求信号的快速傅里叶变换(FFT)就是求信号的离散时间傅里叶级数(DTFS)．二者的数学实质是相同的，不同之处在于它们求解的方式不一样．本章从三个不同的角度讨论FFT．第一，DTFS可以被看作是两个有限维向量空间之间的线性变换，因此存在一个变换矩阵．FFT是这个矩阵运算的一种特殊的分解，它使得完成这个变换所需要的乘法运算和加法运算都很少．第二个观点是使用信号流程图，这与第一个观点是密切相关的．信号流程图是用图来表示代数方程的一种方法．第三是用下采样的方法对信号进行分解递归处理．当然，所有这些都只是从不同的角度去看待同一个事物而已，它们的实质是相同的．我们不能说哪一种观点优于其他的观点，它们只是适用的场合不同而已．

本章目标　**读完本章以后，读者应该掌握：**

- 给定 N 点的FFT，求变换矩阵．
- 使用矩阵分解计算DTFS．
- 使用下采样计算DTFS．

7.1　离散傅里叶级数

DTFS是两个有限维向量空间之间的一种变换．定义域是所有长度为 N 的离散时间信号的集合，值域是所有长度为 N 的离散频率信号的集合．即

$$\mathrm{DTFS}: V \rightarrow V : v(n) \mapsto \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N} \tag{7-1}$$

其中 V 是长度为 N 的复值序列的集合．从该式我们知道DTFS是两个有限维向量空间之间的一种变换．式(7-1)被读作："DTFS是一个从 V 到 V 的映射(函数)，它将 $v(n)$ 变换为 $\sum_{n=0}^{N-1} v(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}$．"根据第4章的知识，我们可以用一个矩阵来表示DTFS．第4.2节给出了求变换矩阵的算法．求DTFS的变换矩阵的方法如下：

1. 分别选取定义域上的基 $\alpha=\{\alpha_i\}$ 和值域上的基 $\beta=\{\beta_i\}$．
2. 求每一个基向量 α_i 的DTFS得到 $V_i(k)$．
3. 求 $[V_i(k)]_\beta$，即求 $V_i(k)$ 关于值域基 β 的坐标．
4. 以 $[V_i(k)]_\beta$ 为矩阵各列，组成变换矩阵．

对长度为 4 的序列执行上述算法，将得到一个 4×4 的变换矩阵 W.

步骤 1：选择基为

$$\alpha=\beta=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \tag{7-2}$$

步骤 2：应用式(7-1)求每一个基向量的变换.

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=V_1(k) \qquad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{j}\\-1\\\mathrm{j}\end{bmatrix}=V_2(k)$$

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}=V_3(k) \qquad \alpha_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1\\\mathrm{j}\\-1\\-\mathrm{j}\end{bmatrix}=V_4(k)$$

步骤 3：求$[V_i(k)]_\beta$，即求 $V_i(k)$关于值域基 β 的坐标. 由于选取的基为通常的规范正交基，所以每个向量的坐标就是向量本身. 对于这一点，我们以 $V_2(k)$为例来加以说明. 将 $V_2(k)$写作

122

$$V_2(k)=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3+a_4\beta_4$$

即

$$\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{j}\\-1\\\mathrm{j}\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

易知，$a_1=1$，$a_2=-\mathrm{j}$，$a_3=-1$，$a_4=\mathrm{j}$，它们具有与 $V_2(k)$对应元素相同的值. 因此，坐标$[V_i(k)]_\beta$ 就是 $V_i(k)$本身.

步骤 4：以$[V_i(k)]_\beta$ 为矩阵各列组成变换矩阵.

$$W=[[V_1(k)]_\beta\quad[V_2(k)]_\beta\quad[V_3(k)]_\beta\quad[V_4(k)]_\beta]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-\mathrm{j}&-1&\mathrm{j}\\1&-1&1&-1\\1&\mathrm{j}&-1&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$$

为了将该矩阵写成标准形式(见式(1-10)和式(1-11))，记

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{7-3}$$

那么，利用 W_N，变换矩阵可写成

$$W = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \tag{7-4}$$

上面的过程可以用以下 MATLAB 命令来实现. 123

```
w = fft(eye(4))                    (7-5)
```

单位矩阵的每一列是定义域的一个基向量. 步骤 2 求每一列的 DTFS，由于值域的基向量是规范正交向量，因此 $[V_i(k)]_\beta$ 的坐标正好就是变换矩阵的各个列向量. 这个过程可以简单地用式(7-5)的 MATLAB 命令实现. 上面的讨论也同样适用于 $N\neq4$ 的情况.

例 7.1 (a)对长度为 3 的信号求 DTFS 的变换矩阵.

(b)求 $v=\{1 \quad -2 \quad 1\}$的变换.

解 (a)步骤 1：选择基为

$$\alpha=\beta=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

步骤 2：应用式(7-1)求每一个基向量的变换.

$$\alpha_1 = \{1 \quad 0 \quad 0\} \leftrightarrow \{1 \quad 1 \quad 1\} = V_1(k)$$

$$\alpha_2 = \{0 \quad 1 \quad 0\} \leftrightarrow \left\{1 \quad -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = V_2(k)$$

$$\alpha_3 = \{0 \quad 0 \quad 1\} \leftrightarrow \left\{1 \quad -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = V_3(k)$$

步骤 3、4：以 $V_1(k)$，$V_2(k)$，$V_3(k)$作为变换矩阵的第 1，2 和 3 列，得变换矩阵

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 \\ W_3^0 & W_3^2 & W_3^4 \end{bmatrix}$$

124

(b) $V=Wv=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{3(1+j\sqrt{3})}{2}\\ \frac{3(1-j\sqrt{3})}{2}\end{bmatrix}$

本题使用了两种方法计算一个向量的 DTFS. 一是直接应用式(7-1)，另一种方法是先求变换矩阵 W，然后用变换矩阵乘向量得到 $V=Wv$. ■

练习 7.1 对长度为 5 的时间信号求 DTFS 的变换矩阵.

答案：$W=$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0.31-j0.95 & -0.81-j0.59 & -0.81+j0.59 & 0.31+j0.95\\ 1 & -0.81-j0.59 & 0.31+j0.95 & 0.31-j0.95 & -0.81+j0.59\\ 1 & -0.81+j0.59 & 0.31-j0.95 & 0.31+j0.95 & -0.81-j0.59\\ 1 & 0.31+j0.95 & -0.81+j0.59 & -0.81-j0.59 & 0.31-j0.95\end{bmatrix}$$

7.2 矩阵分解的观点

我们先通过一个例子来解释 FFT 算法是如何进行的. 此例不是推导，只是简单地说明在 $N=4$ 的情况下，FFT 是如何进行的. 详细的资料可参阅由 E. Oran Brigham 所写的精彩小册子《The Fast Fourier Transform》(Prentice-Hall, 1974). 第一步，将式(7-4)重写为

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3\\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2\\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1\end{bmatrix} \tag{7-6}$$

125

在从式(7-4)推导式(7-6)的过程中，利用了关系式 $W_N^{nk}=W_N^{nk\bmod(N)}$. 由这个关系式有：$W_N^0=1$，$W_4^4=W_4^0=1$，$W_4^6=W_4^2$，$W_4^9=W_4^5=W_4^1$. 下一步是交换 W 的第 2 行和第 3 行，并将矩阵写成两个矩阵的乘积形式

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2\\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3\\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & W_4^0 & 0 & 0\\ 1 & W_4^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & W_4^1\\ 0 & 0 & 1 & W_4^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & W_4^0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & W_4^0\\ 1 & 0 & W_4^2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & W_4^2\end{bmatrix} \tag{7-7}$$

读者可以验证上式等号右边两个矩阵的乘积是否等于左边的矩阵.（左边的矩阵是通过交换矩阵 W 的行得到的，交换矩阵 W 的行是 FFT 算法的一部分.）

现在我们希望证明较之直接使用式(7-7)等号左边的一个矩阵，使用右边的两个矩阵可以减少计算次数. 利用式(7-4)求向量的 DTFS

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ V(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix} \tag{7-8}$$

上式需要作 9 个复数乘法和 12 个复数加法. 相反地，考虑使用式(7-7)右边的两个矩阵. 首先将 v 与最右边的矩阵相乘，得

$$\begin{bmatrix} t(0) \\ t(1) \\ t(2) \\ t(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^0 \\ 1 & 0 & W_4^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix} \tag{7-9}$$

然后将结果 t 与另外一个矩阵相乘得 [126]

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(2) \\ V(1) \\ V(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_4^0 & 0 & 0 \\ 1 & W_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_4^1 \\ 0 & 0 & 1 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(0) \\ t(1) \\ t(2) \\ t(3) \end{bmatrix} \tag{7-10}$$

注意交换左边第 2 行与第 3 行. 为了得到正确的结果，我们还需要对最后的输出结果的分量进行次序调整. 现在考虑这两个公式中的乘法和加法次数. 式(7-9)的第一行是

$$v(0) + W_4^0 v(2)$$

它只需要作一次复数乘法和一次复数加法. 式(7-9)和式(7-10)共有 8 行，总共需要 8 次复数乘法和 8 次复数加法. 显然，我们节省了 1 次复数乘法和 4 次复数加法. 而且，随着 N 的增加，节省的运算次数会更多. 用式(7-8)求 DTFS 所需的运算次数约为 N^2 次. 而采用 FFT，运算次数正比于 $N\log N$.

例 7.2 分别利用式(7-6)和式(7-7)求 4 点序列 $v(n)=\{2, -1, 0, 1\}$ 的 DTFS.

解 (a)由式(7-6)，有

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ V(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2+\mathrm{j}2 \\ 2 \\ 2-\mathrm{j}2 \end{bmatrix}$$

(b)由式(7-9)，有

$$\begin{bmatrix} t(0) \\ t(1) \\ t(2) \\ t(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

127

代入式(7-10)得

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(2) \\ V(1) \\ V(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{j} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2+\mathrm{j}2 \\ 2-\mathrm{j}2 \end{bmatrix}$$

适当调整各分量的次序得

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ V(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2+\mathrm{j}2 \\ 2 \\ 2-\mathrm{j}2 \end{bmatrix}$$

■

7.3 信号流程图表示

由 DTFS 的定义，有

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) W_N^{nk} \tag{7-11}$$

其中

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$$

为了便于解释信号流程图，下面从最简单的 $N=2$ 时的情况开始讨论.
令 $N=2$，将信号 $v=\{v(0)\ v(1)\}$代入式(7-11)，得

$$V(k) = v(0) + W_2^k v(1)$$

即有

$$V(0)=v(0)+v(1)$$

$$V(1)=v(0)-v(1)$$

128

图 7-1a 是第一个方程的示意图，而图 7-1b 是第二个方程的示意图．将上述两个图合并成一个图，如图 7-1c 所示，称为“蝶形图”．蝶形图表示了如下的矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}V(0)\\V(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & W_2^0\\1 & W_2^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(0)\\v(1)\end{bmatrix}$$

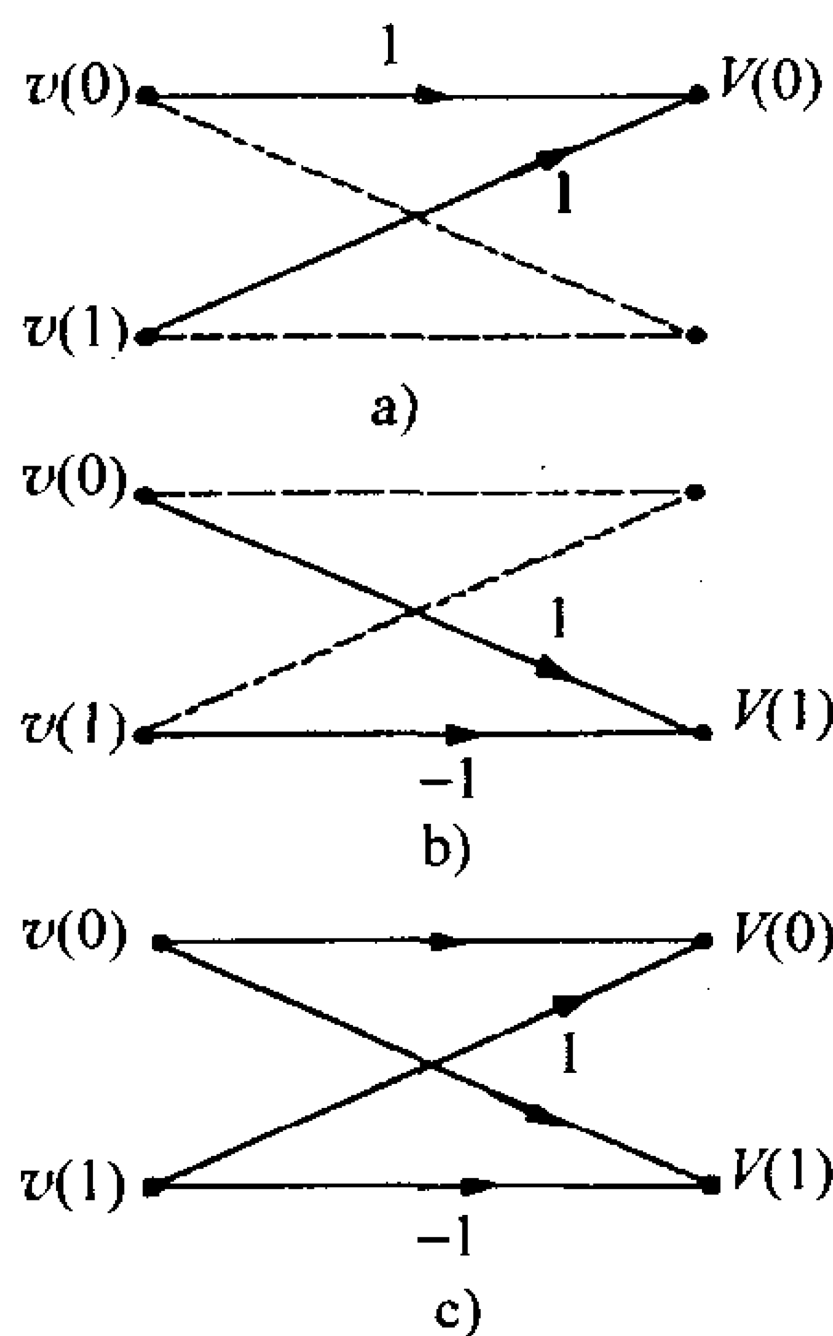


图 7-1　DTFS 的蝶形图

对于 $N=4$ 的情形，应用式(7-11)，得

$$V(k)=v(0)+W_4^k v(1)+W_4^{2k} v(2)+W_4^{3k} v(3) \tag{7-12}$$

将上式分成两部分，使之对应于式(7-9)和式(7-10)，并注意到 $W_4^{2k}=W_2^k$．这样式(7-12)可以写成

$$V(k)=v(0)+v(2)W_2^k+W_4^k[v(1)+v(3)W_2^k] \tag{7-13}$$

对应于不同的 k，上式可以写成下面 4 个方程．

$$\begin{aligned}V(0)&=v(0)+v(2)+v(1)+v(3)\\V(1)&=v(0)-v(2)-\mathrm{j}[v(1)-v(3)]\\V(2)&=v(0)+v(2)-[v(1)+v(3)]\\V(3)&=v(0)-v(2)+\mathrm{j}[v(1)-v(3)]\end{aligned} \tag{7-14}$$

图 7-2 给出了这 4 个方程的信号流程图．其中左半边对应于式(7-9)，右半边对应于式(7-10)，中间变量 t 由下式给出：

129

$$t(0)=v(0)+v(2)$$
$$t(1)=v(1)+v(3)$$
$$t(2)=v(0)-v(2)$$
$$t(3)=v(1)-v(3)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}t(0)\\t(1)\\t(2)\\t(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(0)\\v(1)\\v(2)\\v(3)\end{bmatrix}$$

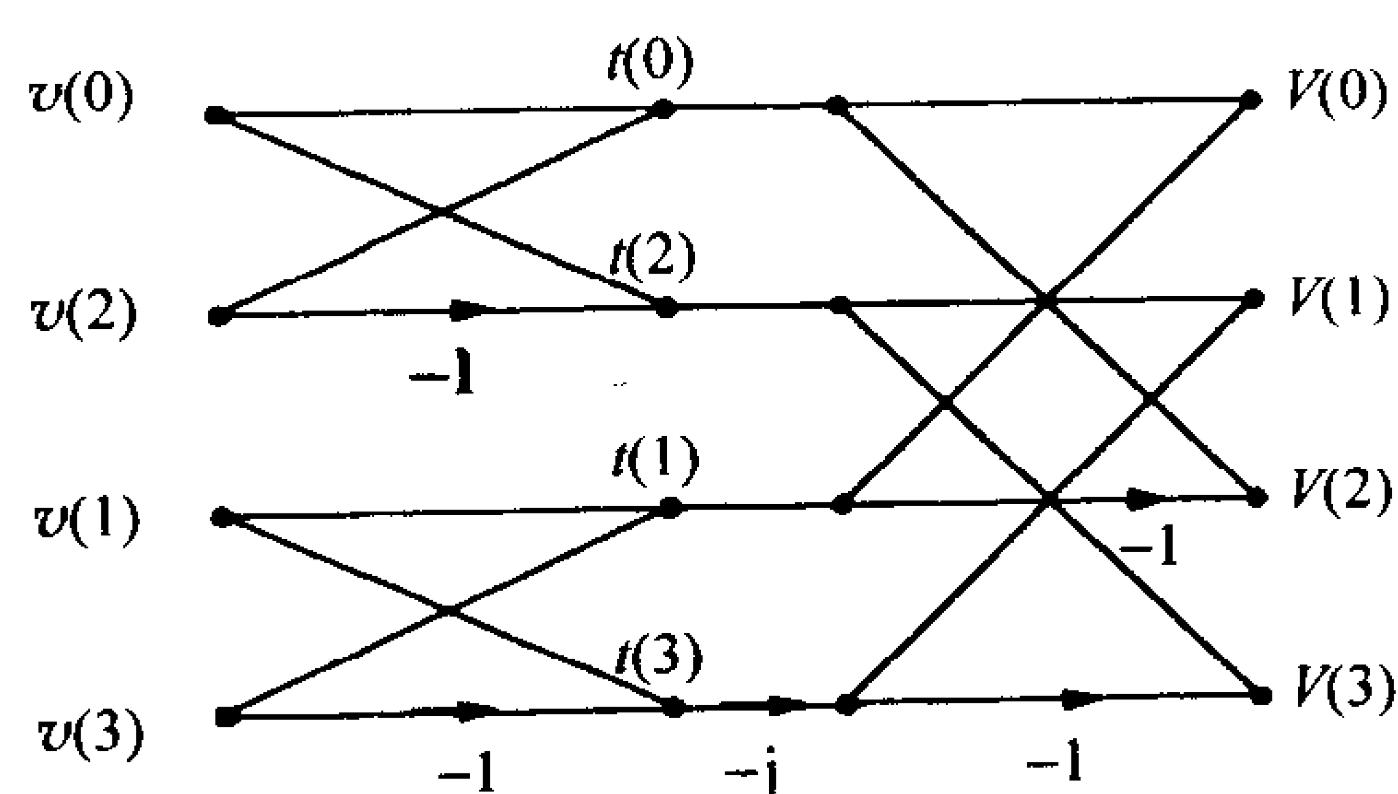


图 7-2 含 4 项的信号流程图

这与式(7-9)是一致的. 将上式的中间变量 t 代入式(7-14), 即得图 7-2 的右半边.

$$V(0)=t(0)+t(1)$$
$$V(1)=t(2)-\mathrm{j}t(3)$$
$$V(2)=t(0)-t(1)$$
$$V(3)=t(2)+\mathrm{j}t(3)$$

130 其矩阵形式与式(7-10)一致.

$$\begin{bmatrix}V(0)\\V(2)\\V(1)\\V(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&-\mathrm{j}\\0&0&1&\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t(0)\\t(1)\\t(2)\\t(3)\end{bmatrix}$$

基本思想

FFT 的基本思想是将 DTFS 分成几个部分，各部分独立运算，经整合后得到最后的结果. 当然，选择合适的组成部分以方便最后的结果整合是重要的. 在 FFT 中，选择合适的组成部分的思想来源于一种特殊的数据存储方法.

考虑计算一个 N 点序列的 DTFS，其中 N 为合数(合数是指能够被表示为除它自己与 1 以外的其他两个数的乘积的数).

$$N = LM \tag{7-15}$$

序列 $v(n)$，$n=0, 1, \cdots, N-1$，既可以存储在一个长度为 N 的一维数组中，也可以存储在一个大小为 $L\times M$ 的二维数组中. 图 7-3 给出了 $v(n)$ 与 $x(\ell, m)$ 的关系，其中

$$x(0,0) = v(0), x(0,1) = v(1), \cdots, x(L-1, M-1) = v(N-1)$$

这是一种基于行序的存储方式，其序号满足下列关系：

$$n = M\ell + m \tag{7-16}$$

注意，数据也可以按列序方式存储，这时，指数关系为

$$n = Lm + \ell \tag{7-17}$$

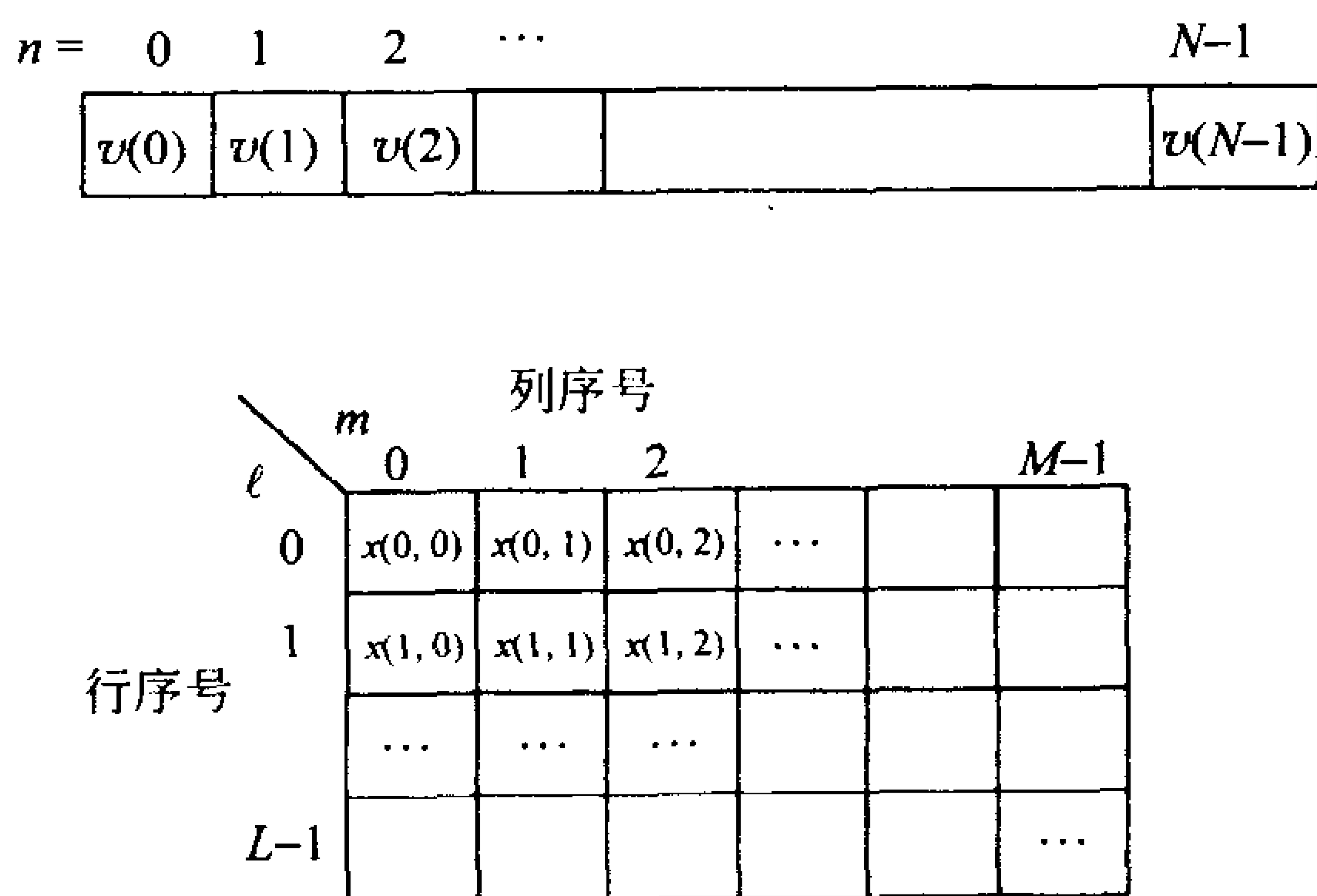


图 7-3 用二维数组存储 $v(n)$

在下面的讨论中，我们将遵照式(7-17)按列序方式存储输入数据$\{v(n)\}$，而按行序方式存储输出数据$\{V(k)\}$. 因此，频域序号 k 和(p, q)满足

$$k = Mp + q \tag{7-18}$$

从而有以下的关系：

$$V(0)=X(0,0),V(1)=X(0,1),\cdots,V(N-1)=X(L-1,M-1)$$

由于 $v(n)$按列序方式存储而 $V(k)$按行序方式存储，因此，用 $x(\ell,\ m)$和 $X(p,\ q)$表示的 DTFS 公式为

$$X(p,q)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{\ell=0}^{L-1}x(\ell,m)W_N^{(Mp+q)(Lm+\ell)} \tag{7-19}$$

为了简化此公式，我们注意到

$$W_N^{(Mp+q)(Lm+\ell)}=W_N^{MLmp}W_N^{Mp\ell}W_N^{Lmq}W_N^{\ell q}$$

而

$$W_N^{MLmp}=W_N^{Nmp}=1$$

$$W_N^{Mp\ell}=W_{N/M}^{p\ell}=W_L^{p\ell}$$

$$W_N^{Lmq}=W_{N/L}^{mq}=W_M^{mq}$$

131 ~ 132

代入式(7-19)，得到其简化形式为

$$X(p,q)=\sum_{\ell=0}^{L-1}\left\{W_N^{\ell q}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(\ell,m)W_M^{mq}\right]\right\}W_L^{p\ell} \tag{7-20}$$

为了便于理解上述表达式，我们把计算分成 3 步.

步骤 1：对 $x(\ell,\ m)$的每一行求表达式的值.

$$T(\ell,q)=\sum_{m=0}^{M-1}x(\ell,m)W_M^{mq},\quad q=0,1,\cdots,M-1 \tag{7-21}$$

其中每一行有 M 个 DTFS 值，共 L 行.

步骤 2：计算新的矩形数组 $R(\ell,\ q)$，其定义如下

$$R(\ell,q)=W_N^{\ell q}T(\ell,q),\quad 0\leqslant\ell\leqslant L-1,\quad 0\leqslant q\leqslant M-1 \tag{7-22}$$

步骤 3：求下式完成整个计算：

$$X(p,q)=\sum_{\ell=0}^{L-1}R(\ell,q)W_L^{p\ell} \tag{7-23}$$

现在详细考察每一步. 假设我们希望求一个 15 点序列 $v(n)$的 DTFS，其中

$$v(n)=\{v(0),v(1),\cdots,v(14)\}$$

因为 15 可以表示为 3×5，我们按列序方式将 $v(n)$存储在一个 3×5 的数组中，即有

$$x=\begin{bmatrix} v(0) & v(5) & v(10) \\ v(1) & v(6) & v(11) \\ v(2) & v(7) & v(12) \\ v(3) & v(8) & v(13) \\ v(4) & v(9) & v(14) \end{bmatrix}$$

133

步骤 1：对每一行计算 3 点 DTFS，得 T 矩阵

$$T=\begin{bmatrix} t(0,0) & t(0,1) & t(0,2) \\ t(1,0) & t(1,1) & t(1,2) \\ t(2,0) & t(2,1) & t(2,2) \\ t(3,0) & t(3,1) & t(3,2) \\ t(4,0) & t(4,1) & t(4,2) \end{bmatrix}$$

即 T 矩阵是通过对 x 矩阵的每一行作变换得到的：

$$\begin{array}{l} \{v(0) \quad v(5) \quad v(10)\} \leftrightarrow \{t(0,0) \quad t(0,1) \quad t(0,2)\} \\ \{v(1) \quad v(6) \quad v(11)\} \leftrightarrow \{t(1,0) \quad t(1,1) \quad t(1,2)\} \\ \quad \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ \{v(4) \quad v(9) \quad v(14)\} \leftrightarrow \{t(4,0) \quad t(4,1) \quad t(4,2)\} \end{array}$$

步骤 2：用 W_N 的左上角子矩阵 W_U 与 T 的对应项分别相乘，求 R 矩阵. W_N 与 W_U 的关系如图 7-4 所示.

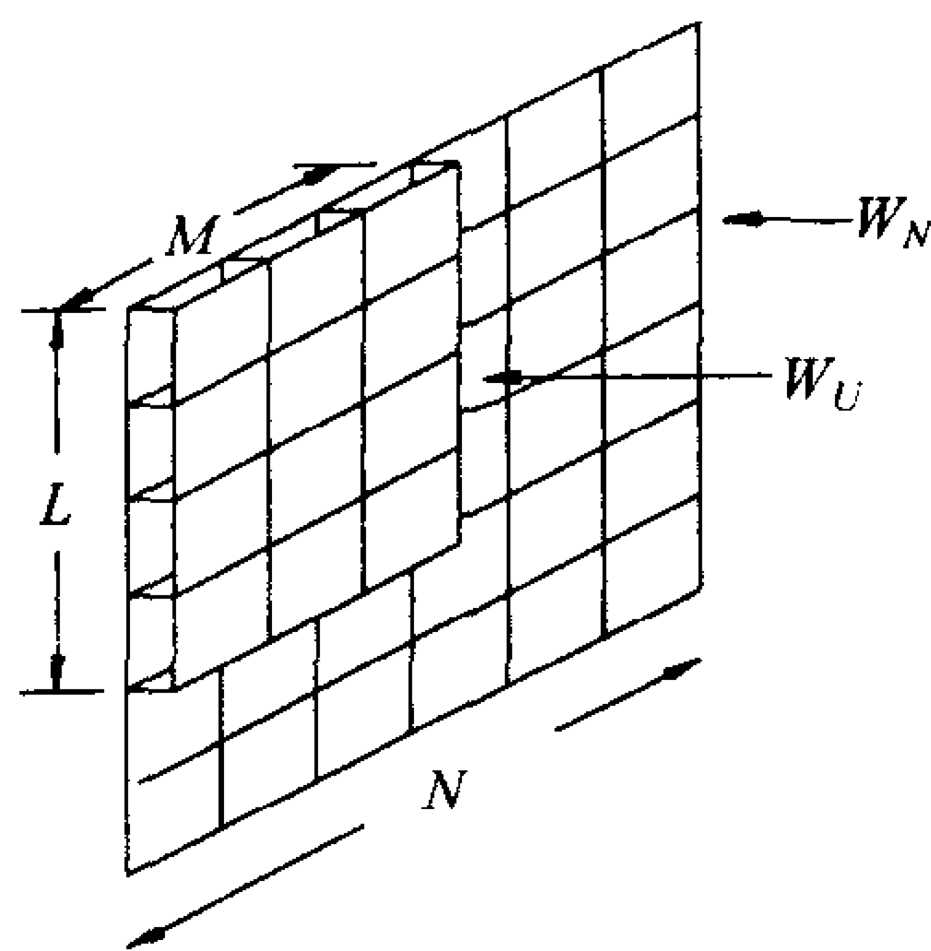


图 7-4 W_N 与 W_U 的示意图

图 7-5 给出了对应项乘法运算的示意图. 换言之，它不是矩阵乘法. 运算产生的 R 矩阵如下：

$$R=\begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r(0,2) \\ r(1,0) & r(1,1) & r(1,2) \\ r(2,0) & r(2,1) & r(2,2) \\ r(3,0) & r(3,1) & r(3,2) \\ r(4,0) & r(4,1) & r(4,2) \end{bmatrix}$$

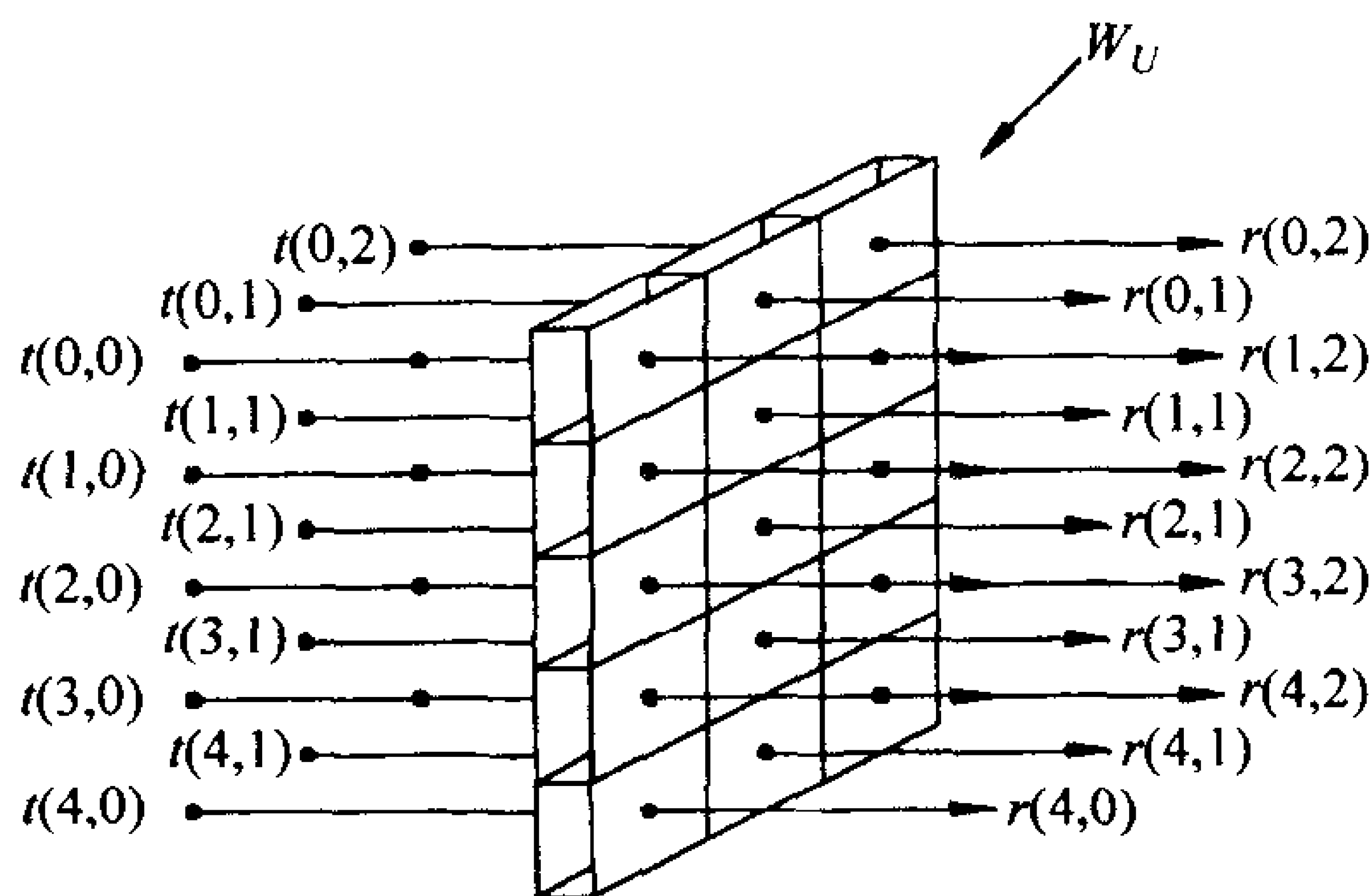


图 7-5 对应项乘法运算

步骤 3：对 R 的每一列求 5 点 DTFS，得输出矩阵 X. 其中第一列为

$$\{r(0,0) \quad r(1,0) \quad r(2,0) \quad r(3,0) \quad r(4,0)\} \leftrightarrow$$

$$\{X(0,0) \quad X(1,0) \quad X(2,0) \quad X(3,0) \quad X(4,0)\}$$

134 ~ 135

对 R 的另外两列作同样的处理，最终得到的 X 矩阵为

$$X=\begin{bmatrix} X(0,0) & X(0,1) & X(0,2) \\ X(1,0) & X(1,1) & X(1,2) \\ X(2,0) & X(2,1) & X(2,2) \\ X(3,0) & X(3,1) & X(3,2) \\ X(4,0) & X(4,1) & X(4,2) \end{bmatrix}$$

按行序方式读出矩阵 X 便得到输出序列 V 如下：

$$V=\{X(0,0) \quad X(0,1) \quad X(0,2) \quad X(1,0) \quad X(1,1) \quad \cdots \quad X(4,2)\}$$

当合数 N 能够被分解为多个质数因子时，可以对每一个质数因子重复上述过程. 这样做实际上是将一个多点 DTFS 转换成许多个较少样本的 DTFS，从而使计算开销减小.

例 7.3 编写 MATLAB 程序，用两种方法计算数组 $v=\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$ 的 DTFS. (a)使用 DTFS 定义. (b)用上述算法.

解 (a)使用 DTFS 定义计算 DTFS 的 MATLAB 程序如下：

```
%DTFS
w6=fft(eye(6));
v=[1;2;3;4;5;6];
V=w6*v
```

得到的运行结果为 $V=$

```
21.0000
-3.0000 + 5.1962i
-3.0000 + 1.7321i
-3.0000 - 0.0000i
-3.0000 - 1.7321i
-3.0000 - 5.1962i
```

(b)让我们看看使用 FFT 算法是否能够得到同样的结果. 首先按列序方式将输入数据存储在一个 3×2 的数组中，执行上述的步骤 1，2，3，然后按行序方式读出输出数据. 下面的 MATLAB 语句按列序方式存储数组 v 并定义一些必要的变量和矩阵 136

```
L=3;
M=2;
x=[v(1:3) v(4:6)];
w3=fft(eye(3));
w2=fft(eye(2));
```

步骤 1：由下列语句求 T 矩阵：

```
t=x*w2;
```

步骤 2：将 T 与 W_6 的左上角相乘：

```
w6=fft(eye(6));
u=w6(1:L,1:M);
r=t.*u;
```

步骤 3：计算 X：

```
X=w3*r
```

输出结果为 $X=$

```
21.0000    -3.0000 + 5.1962i
-3.0000 + 1.7321i -3.0000 - 0.0000i
-3.0000 - 1.7321i -3.0000 - 5.1962i
```

按行序方式读矩阵，结果与(a)的结果显然一致. ■

步骤 1 到步骤 3 可以用来画出信号流程图. 下面，我们以 6 点信号为例说明如何画信号流程图，并以此进一步阐明 FFT 的实质.

例 7.4 画 6 点 FFT 的信号流程图.

解 按列序方式将输入数据存储在一个 3×2 的数组中，如下所示：

$$x=\begin{bmatrix} v(0) & v(3) \\ v(1) & v(4) \\ v(2) & v(5) \end{bmatrix}$$

137

要特别注意，数据是按列方式存储的. 接下来，我们求每一行的 DTFS，得到 T 矩阵. 然后将 T 矩阵与 W_U，即 W_6 的左上角子矩阵的对应项相乘. W_U 表示如下：

$$W_U=\begin{bmatrix} W_6^0 & W_6^0 \\ W_6^0 & W_6^1 \\ W_6^0 & W_6^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\pi/3} \\ 1 & e^{-j2\pi/3} \end{bmatrix}$$

上述过程用图 7-6 表示.

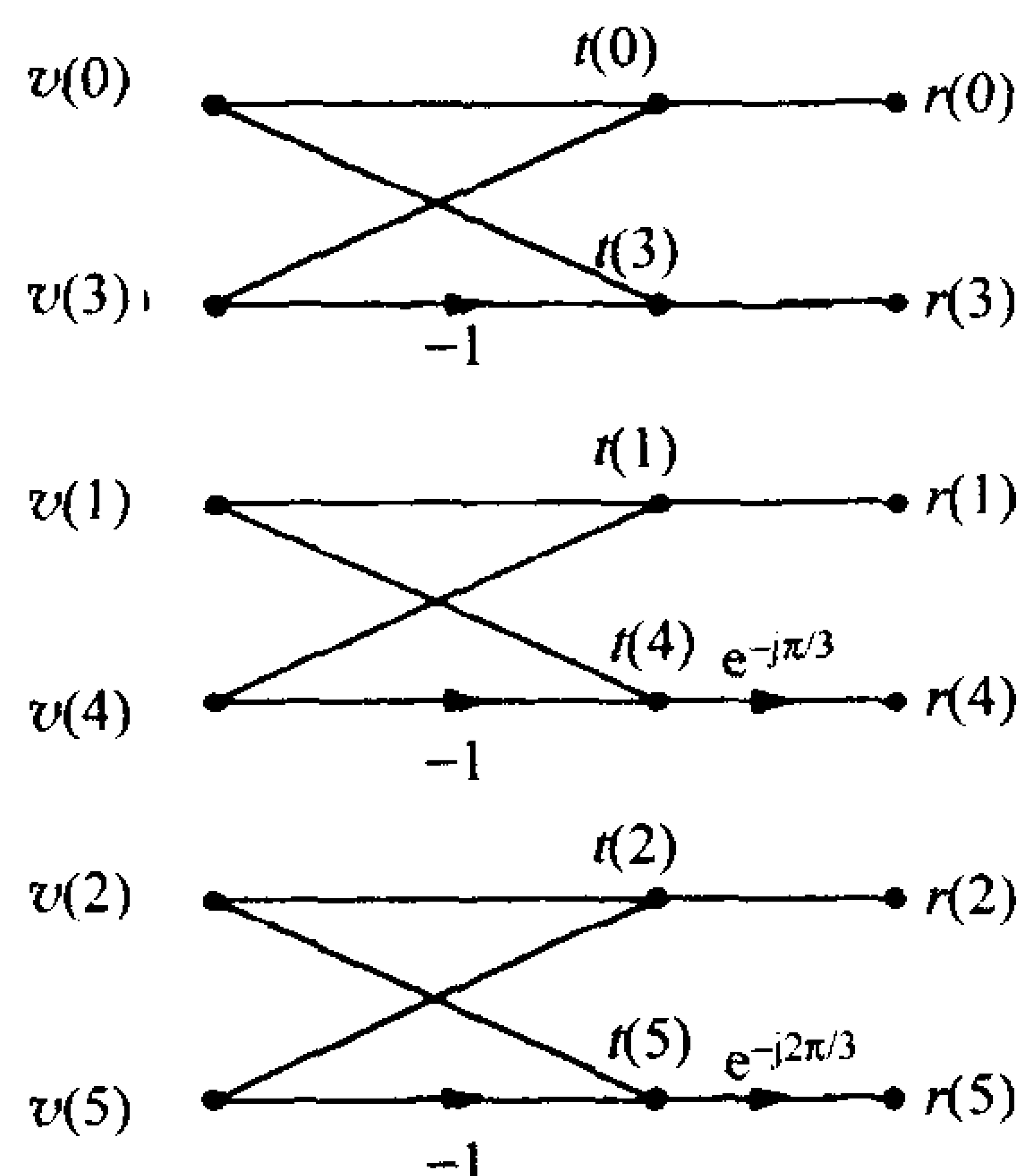
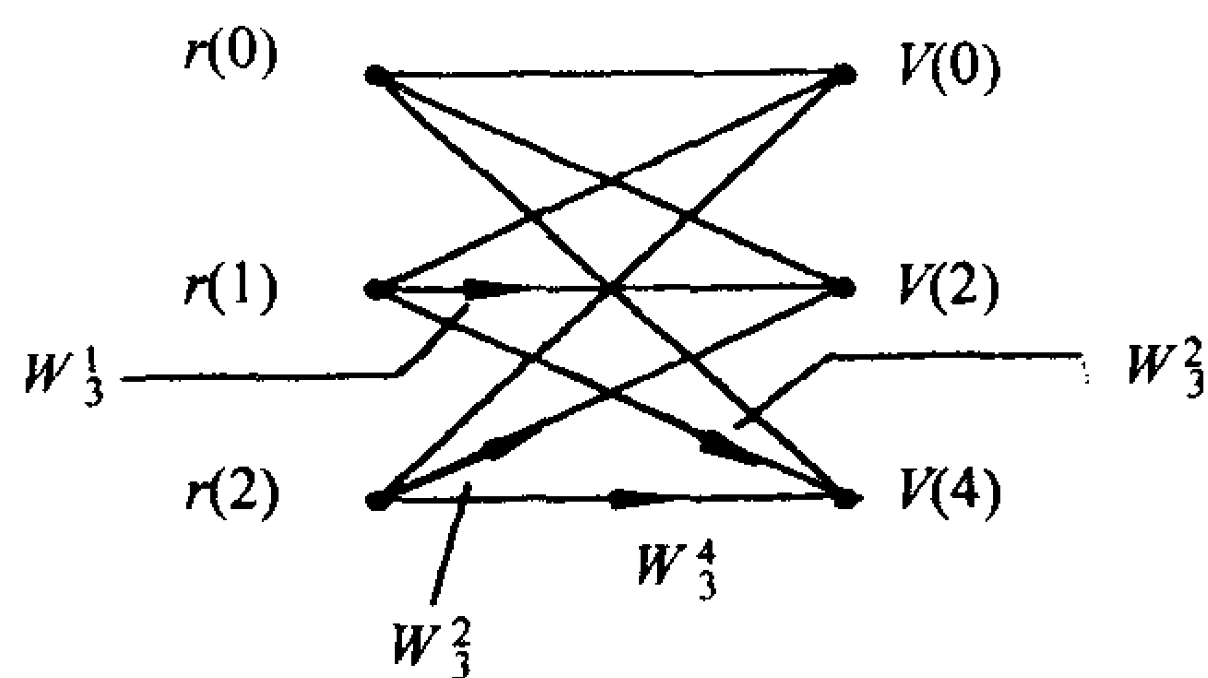


图 7-6 算法的步骤 1 和步骤 2

接下来，对 R 矩阵的每一列构造两个 3 点 DTFS. 图 7-7 为第一列 DTFS 的图示.



138

图 7-7 R 矩阵第一列的 3 点 DTFS

第二列 DTFS 除了输入为 $r(3)$，$r(4)$，$r(5)$外，其他与第一列相同. 其输出

分别为 $V(1)$，$V(3)$，$V(5)$. 最终的信号流程图如图 7-8 所示，它是由图 7-6 与两个 3 点 DTFS 的示意图结合而成的. 第一个 3 点 DTFS 与 $r(0)$，$r(1)$，$r(2)$相连，第二个与 $r(3)$，$r(4)$，$r(5)$相连.

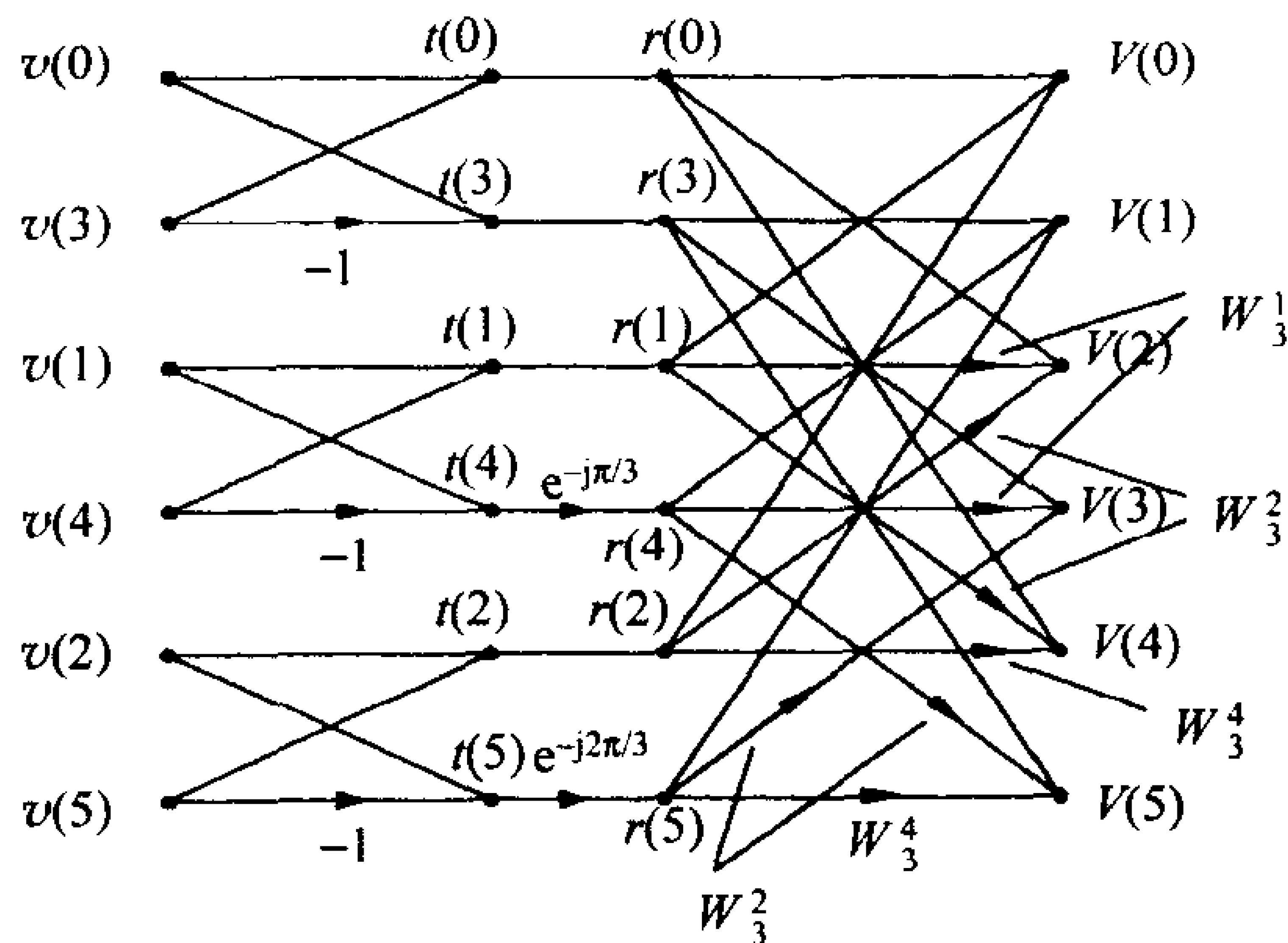


图 7-8 6 点 FFT 的信号流程图 ■

7.4 下采样的观点

对于长度为 N 的信号 v，其中 N 为 2 的整数次幂，我们把它分成两个部分.

$$x_0 = \{v(0) \quad v(2) \quad v(4) \quad \cdots \quad v(N-2)\}$$

$$x_1 = \{v(1) \quad v(3) \quad v(5) \quad \cdots \quad v(N-1)\}$$

序列 x_0 和 x_1 的长度都是 $N/2$，它们的 DTFS 分别为 139

$$X_0(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) W_{N/2}^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} v(2n) W_{N/2}^{nk} \tag{7-24}$$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} v(2n+1) W_{N/2}^{nk} \tag{7-25}$$

原信号 v 的 DTFS 为

$$V(k) = X_0(k) + W_N^k X_1(k) \tag{7-26}$$

x_0 和 x_1 由 v 按 2 下采样得到，图 7-9 给出了这一过程的示意，图中的前向环节 Z 用于产生 x_1.

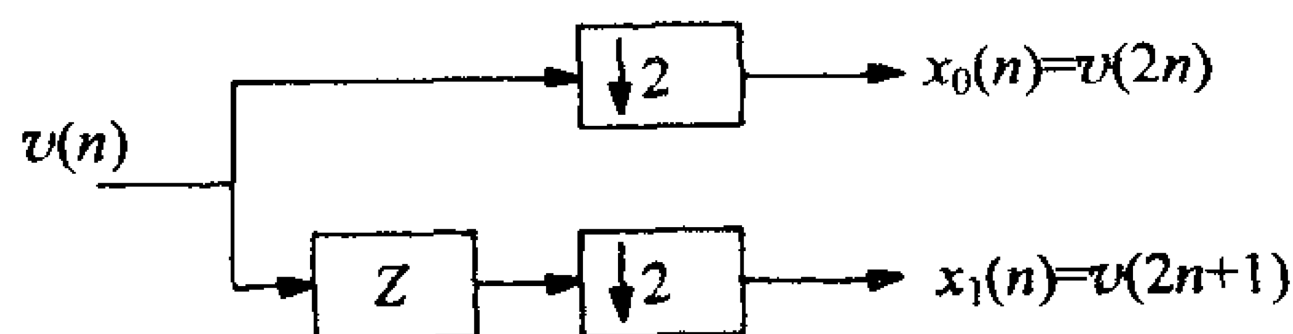


图 7-9 2 下采样示意图

这样的下采样方案能够产生 x_0 和 x_1 序列，并按式(7-26)求出 DTFS. 图 7-10是这一过程的示意图，图中的两个 DTFS 模块分别产生 X_0 和 X_1. 也就是说，式(7-24)和式(7-25)的运算由两个 $N/2$ 点的 DTFS 模块来表示.

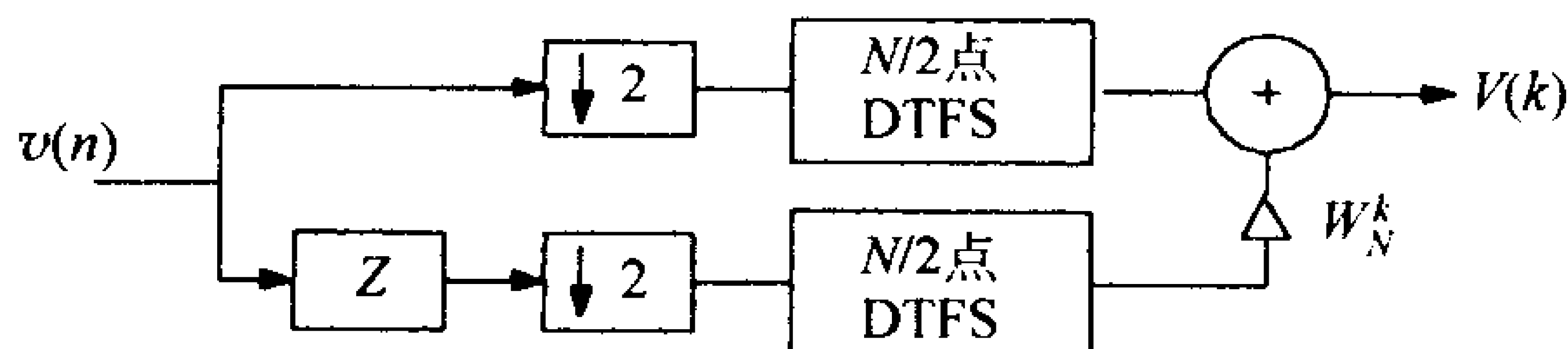


图 7-10 DTFS 运算

接下来我们用图 7-10 所示的结构取代每一个 $N/2$ 点的 DTFS 模块. 继续这一过程，直到 $N=2$ 为止. 最终得到一个 DTFS 运算的嵌套集. 这就好比将两块镜子面对面地摆放而得到的一系列的图像一样. 由这个 DTFS 运算的嵌套集所得到的最终结果就是 FFT 运算.

下采样观点是以不同的观点来看待 FFT 的. 图 7-10 所示的方案被称为时间抽选算法(decimation-in-time algorithm). 下面给出一个例子来进一步说明这个观点.

例 7.5 用 MATLAB 计算下列数组的 DTFS：

$$v = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

(a)使用 DTFS 定义.

(b)使用下采样方法.

解 (a)
```
w8=fft(eye(8));
v=[1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8];
v=w8*v
```

运行结果为

$$V = [36(-4+j9.657)(-4+j4)(-4+j1.657)$$
$$-4(-4-j1.657)(-4-j4)(-4-j9.657)]$$

(b)图 7-11 是计算一个 8 点 FFT 的完整示意图. 8 点输入信号被记为 v，第一级下采样的输出由 v_0 和 v_1 组成，长度为 4. 信号 v_{00}，v_{01}，v_{10}，v_{11} 的长度均为 2，它们是 2 点 DTFS 运算的输入.

图 7-12 表示了 2 点 FFT 运算的两种观点，第一种为蝶形图，第二种为下采样. 二者都是有效的，实际上它们表示的是同一个东西.

下面，我们以 8 点信号 $v(n)$ 为例，给出计算 FFT 的详细步骤.

140
≀
141

步骤 1：对 $v(n)$ 下采样得到两个 4 点信号 $v_0(n)$ 和 $v_1(n)$.

$$v_0 = \{1,3,5,7\} \qquad v_1 = \{2,4,6,8\}$$

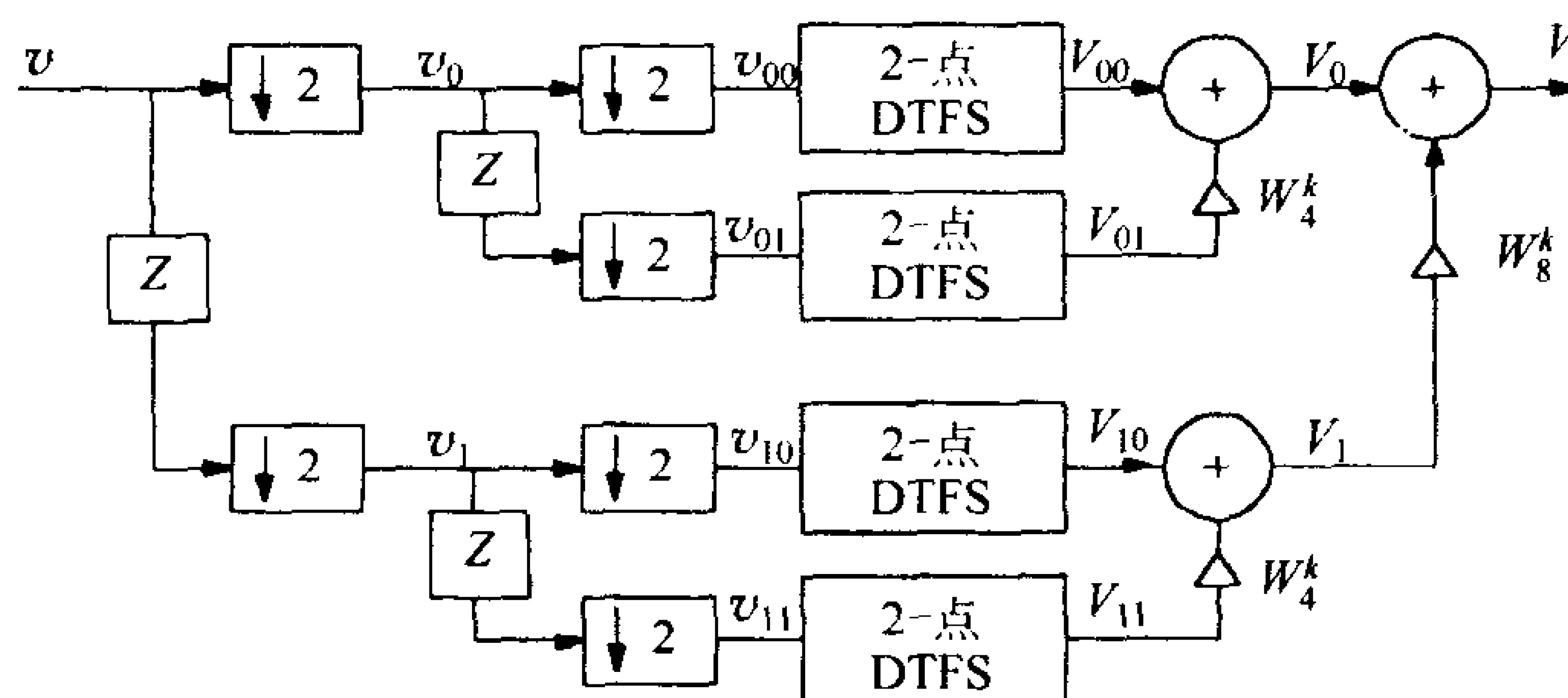


图 7-11　按下采样运算的 8 点 FFT

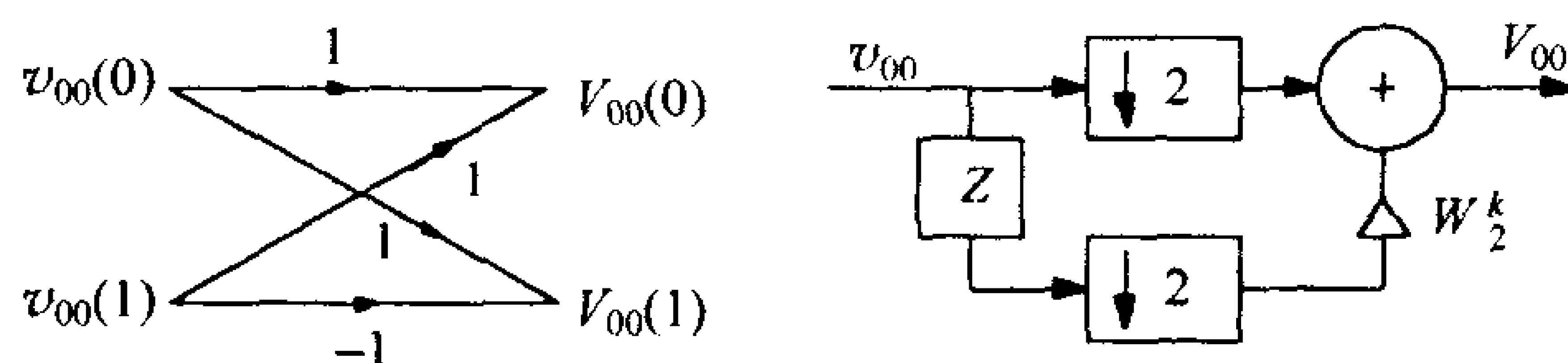


图 7-12　2 点 FFT 的两种观点

步骤 2：对这两个 4 点信号下采样.

$$v_{00}=\{1,5\}\quad v_{01}=\{3,7\}\quad v_{10}=\{2,6\}\quad v_{11}=\{4,8\}$$

步骤 3：对每一个信号求 2 点 FFT.

$$V_{00}=\{6,-4\}\qquad V_{01}=\{10,-4\}$$

$$V_{10}=\{8,-4\}\qquad V_{11}=\{12,-4\}$$

步骤 4：根据式(7-26)，由 V_{00} 和 V_{01} 计算 V_0.

$$V_0(k)=V_{00}(k)+W_4^kV_{01}(k)$$

142

注意到 V_{00} 的周期性，即 $V_{00}(2)=V_{00}(0)$，$V_{00}(3)=V_{00}(1)$. 同样，V_{01}，V_{10}，V_{11} 也有类似的周期性. 因此，V_0 的 4 个值为

$$V_0(0)=V_{00}(0)+W_4^0V_{01}(0)=6+10=16$$

$$V_0(1)=V_{00}(1)+W_4^1V_{01}(1)=-4+\mathrm{j}4$$

$$V_0(2)=V_{00}(0)+W_4^2V_{01}(0)=6-10=-4$$

$$V_0(3)=V_{00}(1)+W_4^3V_{00}(1)=-4-\mathrm{j}4$$

步骤 5：根据式(7-26)，由 V_{10} 和 V_{11} 计算 V_1.

$$V_1(0)=V_{10}(0)+W_4^0V_{11}(0)=8+12=20$$

$$V_1(1)=V_{10}(1)+W_4^1V_{11}(1)=-4+\mathrm{j}4$$

$$V_1(2) = V_{10}(0) + W_4^2 V_{11}(0) = 8 - 12 = -4$$

$$V_1(3) = V_{10}(1) + W_4^3 V_{10}(1) = -4 - j4$$

因此，V_0 和 V_1 为

$$V_0 = \{16 \quad (-4+j4) \quad -4 \quad (-4-j4)\}$$

$$V_1 = \{20 \quad (-4+j4) \quad -4 \quad (-4-j4)\}$$

步骤 6：根据式(7-26)，由 V_0 和 V_1 计算 V. 在本例中，式(7-26)为

$$V(k) = V_0(k) + W_8^k V_1(k)$$

所以

$$V(0) = V_0(0) + W_8^0 V_1(0) = 16 + 20 = 36$$

$$V(1) = V_0(1) + W_8^1 V_1(1) = (-4+j4) + 1\angle -45^\circ(-4+j4)$$
$$= -4 + j9.657$$

$$V(2) = V_0(2) + W_8^2 V_1(2) = -4 + j4$$

$$V(3) = V_0(3) + W_8^3 V_1(3) = (-4-j4) + 1\angle -135^\circ(-4-j4)$$

143

$$= -4 + j1.657$$

$$V(4) = V_0(0) + W_8^4 V_1(0) = 16 - 20 = -4$$

$$V(5) = V_0(1) + W_8^5 V_1(1) = (-4+j4) + 1\angle 135^\circ(-4+j4)$$
$$= -4 - j1.657$$

$$V(6) = V_0(2) + W_8^6 V_1(2) = -4 - j4$$

$$V(7) = V_0(3) + W_8^7 V_1(3) = (-4-j4) + 1\angle 45^\circ(-4-j4)$$
$$= -4 - j9.657$$

144 这一结果与本例(a)小题所求得的结果是一致的. ■

第8章 小波变换

小波变换在两个方面不同于其他变换．拉普拉斯变换的基是一组指数函数$\{e^{st}\}$，z变换的基也是一组指数函数$\{z^{n}\}$，傅里叶变换的每一种形式也都有各自的基．按此推理，一种变换对应一组基，那么，我们可以说小波变换有很多种．

第二方面的不同在于变换的计算．大多数变换的计算都是将波形与基函数作点积．小波变换也可以这样计算，条件是基函数的解析表达式是已知的．但是，在大多数情况下，小波的解析式是未知的，所以我们只能采取另外的计算方法．第6章中的许多概念可以用于小波变换的计算．本章将在引入哈尔变换后花较多的笔墨来介绍这方面的内容．

本章目标 **读完本章以后，读者应该掌握：**

- 对给定的向量空间V_1和它的子集$V_0 \subset V_1$，求正交分量$V_0^{\perp}$．
- 用哈尔小波求在特定分辨率下给定信号的近似．
- 利用二尺度关系（式(8-13)和式(8-14)）计算低分辨率尺度函数和小波．

8.1 尺度函数与小波

我们先简单复习一下前面的内容．首先要特别强调的是：向量不仅仅是一个带方向的量或一个$n \times 1$的矩阵，它应该有更深刻的内涵．当听到向量这个词时，一个真正的数学家会马上联想到函数或者波形．下面把第2章对向量的定义复述如下．

定义2.1 一个向量空间是一个集合$V=\{v_i\}$加上一个数域$A=\{a_i\}$，在该集合上定义了如下的两种运算并满足以下的7条性质．

1．两个向量可以相加得到第三个向量．这个运算使我们可以由两个向量来产生一个新的向量．

2．一个数可以与一个向量相乘来得到另一个向量．这个运算可以使我们由一个数和一个向量来产生一个新的向量．

对于向量的加法以及向量和数的乘法这两种运算，如下的性质对于所有$v_i \in V$和$a_i \in A$成立：

(1)$v_1+v_2=v_2+v_1$．

(2)$(v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$．

(3)$a_1(v_1+v_2)=a_1v_1+a_1v_2$．

(4)$(a_1+a_2)v_i=a_1v_i+a_2v_i$.

(5)$(a_1a_2)v_i=a_1(a_2v_i)$.

(6)$1\cdot v_i=v_i$.

(7)存在唯一的向量 v_0，称为零向量，对所有向量 v_i，满足 $0\cdot v_i=v_0$.

现在考虑波形. 为了使问题更加明确，我们考虑连续时间能量信号(作为其典型的例子，考虑有限持续时间信号). 两个连续时间能量信号相加得到另一个连续时间能量信号. 连续时间能量信号与标量(可以是实数，也可以是复数)相乘将改变信号的振幅. 因为能量信号满足向量空间的所有7个性质，所以它构成一个向量空间. 这就是说每一个能量信号是一个向量. 因此，一个能量信号同一个带方向的量或一个由分量构造的向量是一样的.

类似地，所有连续时间功率信号构成的集合也构成一个向量空间. 同样地，所有离散时间能量信号的集合和所有离散时间功率信号的集合也分别构成向量空间. 当然，还有许多其他的向量空间，这里所给的只是几个例子而已.

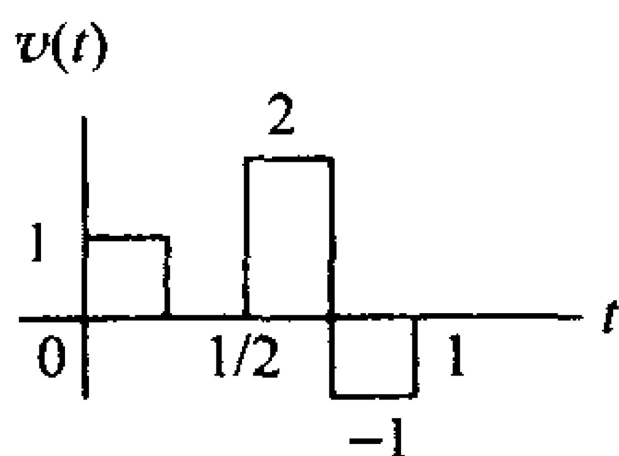
例 8.1 图8-1所示为一个定义在区间[0, 1]上的分段常数波形. 区间被分为4个常数段，[0, 1/4]，[1/4, 1/2]，[1/2, 3/4]，[3/4, 1]. V 是所有形如这种波形的集合(即它定义在区间[0, 1]上，由4个这样的常数段构成). 定义该集合上的内积如下：

$$\langle v_1 \mid v_2\rangle=\int_0^1 v_1(t)v_2(t)\,\mathrm{d}t$$

(a)说明 V 构成向量空间.

(b)求 V 的一组基.

(c)确定 V 的维数.



146

图 8-1 分段常数函数(一个向量)

解 (a)因为两个分段常数函数相加其和还是分段常数函数，标量与分段常数函数相乘其积还是分段常数函数，所以集合 V 满足定义2.1中的两个运算. 同时，V 满足定义2.1中的所有7个性质，例如，零向量就是在每一个分段都为零的函数. 所以，它构成向量空间.

(b)图8-2所示的波形构成一组基，而图8-3是另一组基. 两组基向量构成的集合具有一些好的性质. 图8-2所示的基 $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 是正交的，也就是说任意两个不同的基向量的内积为零. 然而，这组基不是规范正交基，因为对

所有的 i，α_i 与它自己的内积不是 1(假如每一个波形的高度均为 2，则构成的基就是规范正交基)．图 8-3 所示的基是规范正交的，因为不同的基向量之间的内积为零，而任意一个基向量与自己作内积结果为 1.

(c)V 的维数为 4，因为基向量的个数为 4.

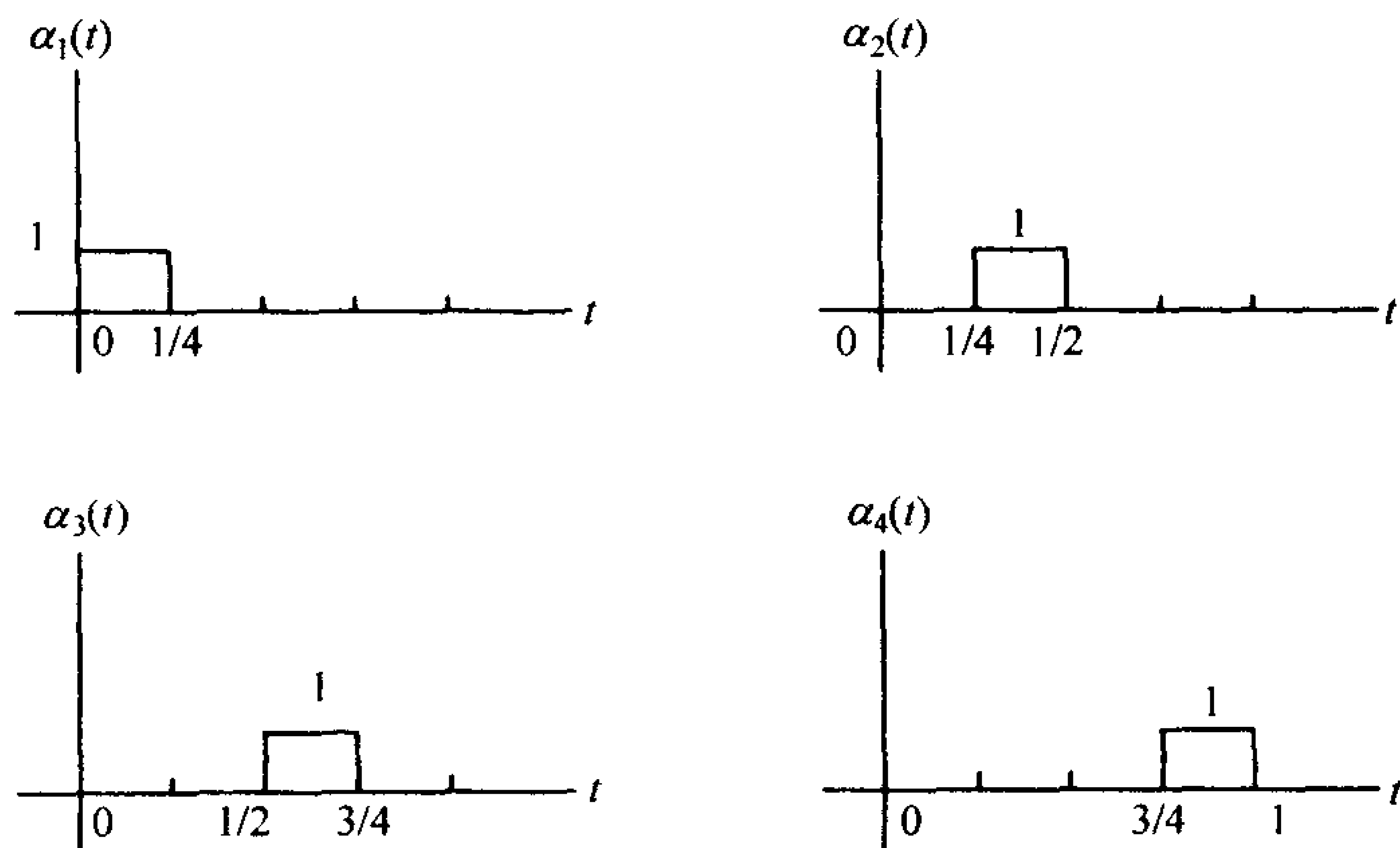


图 8-2　V 的一组基

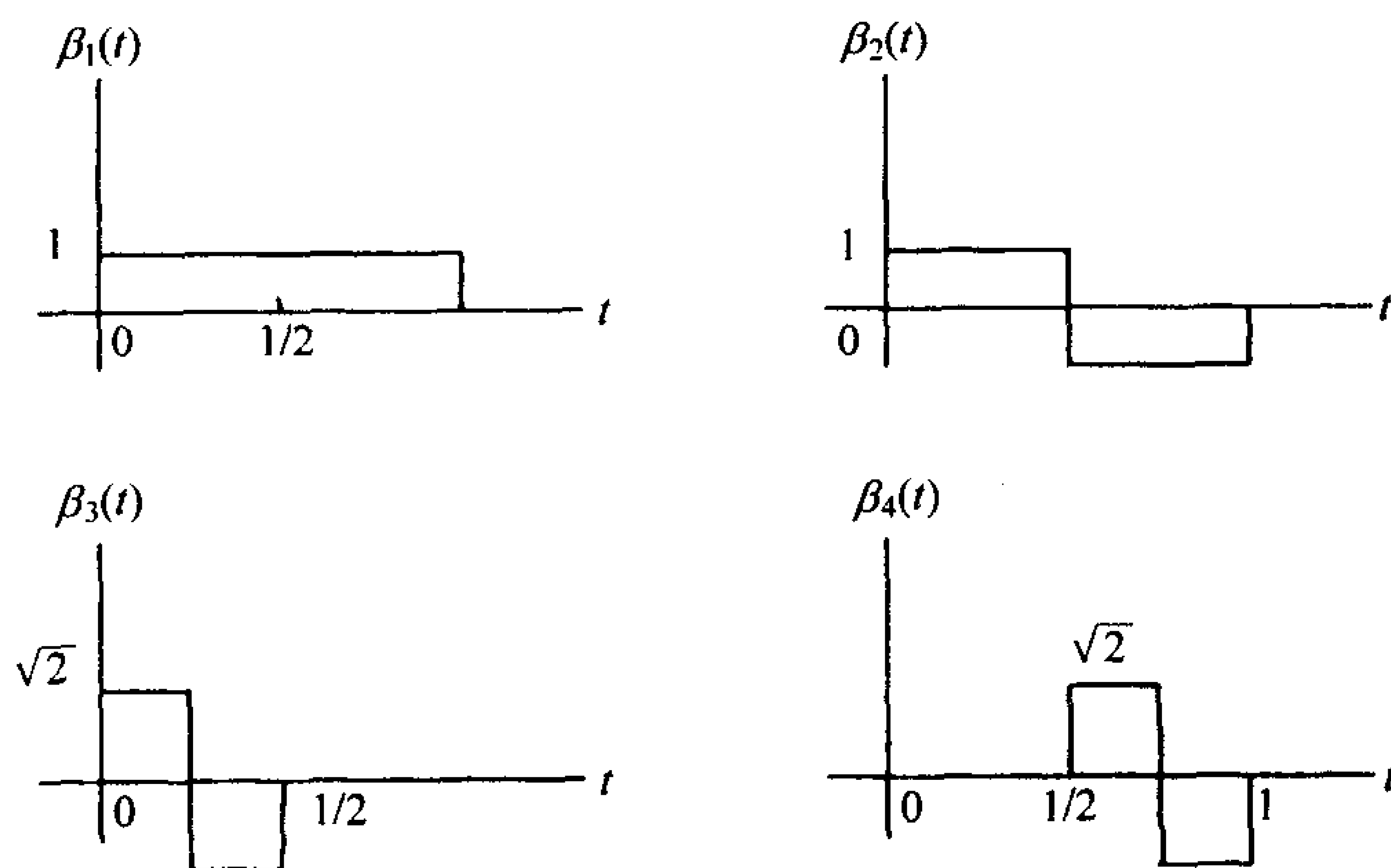


图 8-3　V 的一组规范正交基

■

例 8.2　分别用关于如下两组基的分量形式表示图 8-1 中的 $v(t)$：(a)基 α，(b)基 β.

解　(a)比较图 8-1 中的信号与 α 的基向量，不难发现 $v(t)$可以表示为基向量的一个线性组合.

$$v(t) = \alpha_1(t) + 2\alpha_3(t) - \alpha_4(t)$$

因此，$v(t)$关于基 α 的分量表示为

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b)$v(t)$关于基β的分量表示不如关于基α的分量表示那么明显，它需要采用一种系统的方法才能求得. 将$v(t)$表示为基β的基向量的线性组合，如式(8-1)所示.

$$v(t) = b_1\beta_1(t) + b_2\beta_2(t) + b_3\beta_3(t) + b_4\beta_4(t) \tag{8-1}$$

147 ≀ 148

即分向量$[v]_\beta$由b_1，b_2，b_3，b_4 4个分量组成. b_1，b_2，b_3，b_4是4个未知量，为了建立4个独立方程，将式(8-1)分别与4个基向量作内积.（也可以求$\langle \nu \mid \beta_i \rangle$，其结果是一样的.）

$$\langle \beta_i \mid v \rangle = b_1\langle \beta_i \mid \beta_1 \rangle + b_2\langle \beta_i \mid \beta_2 \rangle + b_3\langle \beta_i \mid \beta_3 \rangle + b_4\langle \beta_i \mid \beta_4 \rangle,\text{对于 } i = 1,2,3,4$$

图8-4给出了$\beta_1(t)$和$v(t)$的波形，将两个函数相乘，再求它们的积的面积得内积为$1/4[1+2-1]=1/2$. 类似地可以求得其他系数，得到关于基β的分量形式，表示为

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

因此，式(8-1)为$v(t)=\frac{1}{2}\beta_1(t)+\frac{\sqrt{2}}{4}\beta_3(t)+\frac{3\sqrt{2}}{4}\beta_4(t)$.

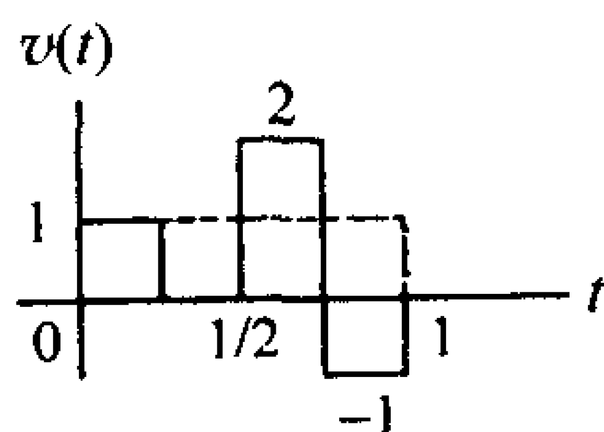


图8-4 $\beta_1(t)$和$v(t)$的波形 ■

下面我们考虑一种新的思路：把系数向量看成$v(t)$的变换. 因此，$[v]_\alpha$是$v(t)$的关于基α的变换，$[v]_\beta$是$v(t)$的关于基β的变换. 因此可以将它们写成

$$v(t) \overset{\alpha}{\longleftrightarrow} \{1,0,2,-1\} \tag{8-2}$$

$$v(t)\overset{\beta}{\longleftrightarrow}\left\{\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right\} \tag{8-3}$$

式(8-3)是 $v(t)$ 的哈尔小波变换. 哈尔函数是分段常数函数，我们先以此为例来说明小波的一般性质，再对其他小波展开讨论.

把式(8-3)称为变换是合理的. 回顾第 1 章中关于变换的讨论，所谓变换或算子(transform or operator)是指两个函数集(向量集)之间的一种关系. 在我们的应用中，定义域或图 1-2 中黑盒子的输入是时间的函数，输出向量是变换. 在 149 我们的问题中，我们就把这个输出看作是输入时间函数的小波变换.

练习 8.1 求图 8-5 中 $v(t)$ 的哈尔小波变换，利用图 8-3 的基函数，给所求的结果画图，并验证它是否正确地表达了 $v(t)$.

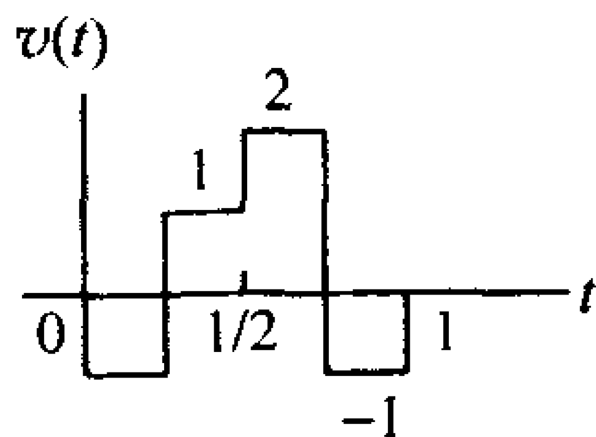


图 8-5 练习 8.1 的函数

答案：$v(t)=\frac{1}{4}\beta_1(t)-\frac{1}{4}\beta_2(t)-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_3(t)+\frac{3\sqrt{2}}{4}\beta_4(t)$.

信号 $v(t)$ 的小波变换是它在一组基上的投影(式(8-3)的变换 $\left\{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$ 是 $v(t)$ 在基向量 β 上的投影). 基是一个函数族，函数族中的函数由一个原型小波 $\psi(t)$ 经规范平移和伸缩得到(β 中的原型小波或母小波是 β_2)；此外，还包含另一个函数族 $\varphi(t)$，被称为尺度函数(在图 8-3 中，β_1 是原型尺度函数). 两个函数族彼此关联，一个是另一个的正交补(见定义 8.1). 要正确理解这些内容，需要了解两个向量空间直和的概念. 因此，下面先给出一些基本的数学知识.

令 V_1 是一个向量空间，V_0 是 V_1 的一个子集，记为 $V_0\subset V_1$. 注意，V_0 本身可以是也可以不是一个向量空间. 要使得 V_0 构成一个向量子空间(而不仅仅是子集)，它必须满足定义 2.1 的所有性质(我们务必时刻牢记这一点). 下面是一个集合的正交补的定义.

定义 8.1 设 V_0 是向量空间 V_1 的任一子集，定义 V_0 的正交补(orthogonal

complement)，记作 $V_0^\perp$，读作"V_0-perp"⊖，为 V_1 中与 V_0 的每一个向量都正交的所有向量的集合，即

150

$$V_0^\perp = \{w \in V_1 \mid \langle w \mid v \rangle = 0 \quad 对所有\ v \in V_0\}$$

例 8.3 令 $V_1=R^2$ 为所有 2×1 的矩阵的集合. $V_0=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$是一个只包含一个矩阵的集合. 定义点积为$\langle w \mid v\rangle = w'v$(注意，对于同一个向量空间可以定义不同的内积，只要满足定义 2.4 的性质即可). 求 $V_0^\perp$，并说明它是 V_1 的一个子集.

解 任何与 $v=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$正交的向量 w(包括零向量)一定具有这样的形式，$w=a\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. 这意味着正交补为 $V_0^\perp=\left\{\begin{bmatrix}a\\-a\end{bmatrix}\right\}$. 因为 $0_V\in V_0^\perp$，并且所有形如 $a_1w_1+a_2w_2$ 的向量都是 $V_0^\perp$ 的元素，因此它是一个向量空间. ■

例 8.4 设 V_1 是所有次数不高于 2 的多项式的集合，它的每一个元素可以表示为

$$x_i(t) = a_i + b_it + c_it^2, \qquad 对所有\ i$$

定义内积为$<x_1 \mid x_2>=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$(这里的内积定义与例 8.3 中的定义不同). 任意选择集合 $V_0=\{ct^2\}$，c 为任意实数，也就是说，V_0 包含 $x_1(t)=2t^2$，$x_2(t)=-1.5t^2$，但不包含 $x_3(t)=t+2t^2$，也不包含 $x_4(t)=5-2t$. 注意，$x_4(t)$ 与 $x_1(t)$，$x_2(t)$均正交，而 $x_3(t)$与它们不正交(这是由内积的定义决定的). 事实上，$V_0^\perp$ 由所有形如 $a+bt$ 的多项式组成，即它是所有次数不高于 1 的多项式的集合，是 V_1 的一个子空间. ■

容易看到，即使 V_0 只是一个集合(不一定是子空间)，$V_0^\perp$ 一定是 V_1 的子空间. 在我们的问题中，V_0 总是 V_1 的子空间，这使得我们可以把 V_1 中的向量分解为两个向量空间之和的形式. 这个分解被称为直和(direct sum).

151

定义 8.2 设 V_0 是内积空间 V_1 的一个有限维子空间，且任意向量 $y\in V_1$ 都能够被唯一地分解为 $y=v+w$，其中 $v\in V_0$，$w\in V_0^\perp$. 则我们说 V_1 是 V_0 与 $V_0^\perp$ 的直和，记作 $V_1=V_0\oplus V_0^\perp$.

下面给出一个例子来加深对这一概念的理解. 设 V_1 是定义在区间 $0\leqslant t<1/2$ 和 $1/2\leqslant t<1$ 上的分段常数函数的集合，如图 8-6 所示. 也就是说，若 $y(t)$属于 V_1 则

$$y(t) = \begin{cases} k_1, 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2} \\ k_2, \dfrac{1}{2} \leqslant t < 1 \end{cases} \tag{8-4}$$

⊖ perpendicular 的意思，中文可直接读作"V_0 的正交补". ——译者注

其中，k_1，k_2 均为常数.



图 8-6 分段常数函数 $y(t)$

设 V_0 是区间 $0\leqslant t<1$ 上的所有常值函数(哈尔函数)的集合. 图 8-7 所示是该集合中的一个函数，$\varphi_{00}(t)=1$，$0\leqslant t<1$. 其他函数的值可以是 1.5，-1，2 等. 事实上，$\varphi_{00}(t)$是 V_0 的一个基，因为 V_0 的任何元素都可以表示为 $\varphi_{00}(t)$与一个常数的乘积. 注意，因为 V_0 中的任意函数也在 V_1 中(即 V_0 由 $k_1=k_2$ 的函数组成)，因此 $V_0\subset V_1$. 定义 V_1 中的内积为

$$\langle y_1 \mid y_2 \rangle = \int_0^1 y_1(t)y_2(t)\mathrm{d}t \tag{8-5}$$

V_1 和 V_0 是两个向量空间，且 $V_0\subset V_1$. 求 V_0 的正交补 $W_0=V_0^{\perp}$.

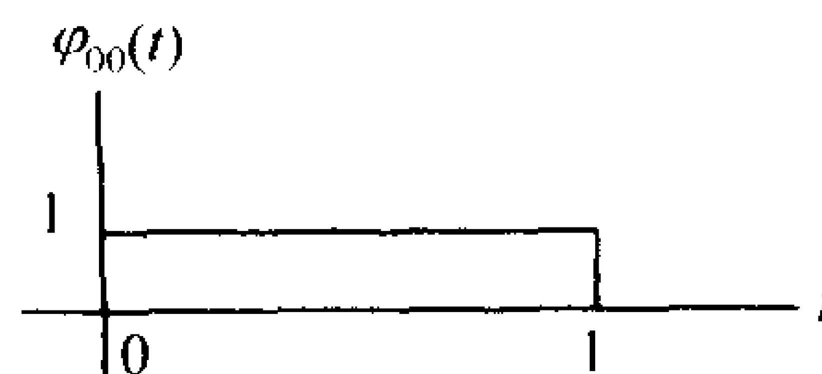


图 8-7 函数 $\varphi_{00}(t)$

任何关于点 $t=1/2$ 奇对称的函数与 V_0 中每个函数正交. 然而，由于 $V_0^{\perp}$ 是 V_1 的子集，因此我们只能把目标锁定在分段常数函数上. 图 8-8 所示的函数 $\psi_{00}(t)$ 同时满足这两个性质，即它与 V_0 中每个函数正交，同时又属于 V_1. 因此，所有 $\psi_{00}(t)$与常数的乘积组成的函数集合就构成向量空间 $W_0=V_0^{\perp}$. [152]

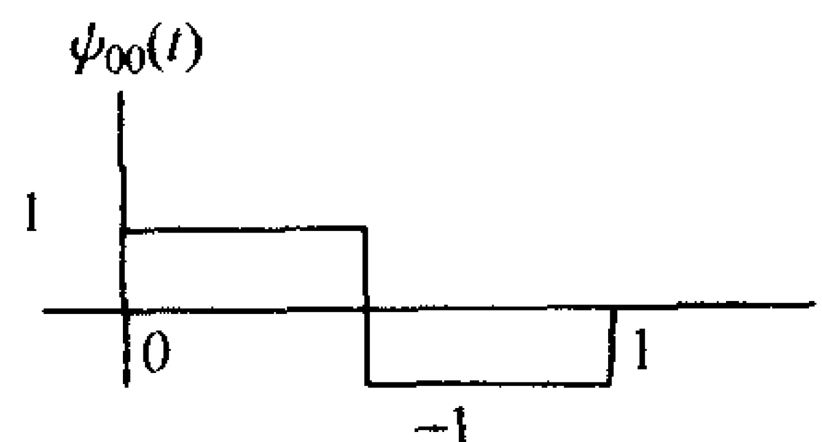


图 8-8 函数 $\psi_{00}(t)$

值得注意的是向量 $\varphi_{00}(t)$和 $\psi_{00}(t)$构成 V_1 的基，也就是说，V_1 中的任意波形都可以而且只能以唯一的方式，表示为这两个向量的线性组合. 下面以图 8-6 的波形为例来说明这一点.

例 8.5 将图 8-6 中的 $y(t)$表示为图 8-7 和图 8-8 中的基函数 $\varphi_{00}(t)$和 $\psi_{00}(t)$的线性组合. 设 $k_1=2$, $k_2=1$.

解 将 $y(t)$表示为

$$y(t) = a_1\varphi_{00}(t) + a_2\psi_{00}(t) \tag{8-6}$$

为了求 a_1，将方程的每一项与 $\varphi_{00}(t)$作内积.

$$\langle y(t) \mid \varphi_{00}(t)\rangle = a_1\langle \varphi_{00}(t) \mid \varphi_{00}(t)\rangle + a_2\langle \psi_{00}(t) \mid \varphi_{00}(t)\rangle \tag{8-7}$$

等号右边的第一个内积为 1，因为 $\varphi_{00}(t)$的范数为 1. 第二个内积为零，因为 $\varphi_{00}(t)$和 $\psi_{00}(t)$是正交的. 因此

$$a_1 = \langle y(t) \mid \varphi_{00}(t)\rangle = \int_0^{1/2} 2\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} 1\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$$

类似地，将式(8-6)的每一项与 $\psi_{00}(t)$作内积，有

$$a_2 = \langle y(t) \mid \psi_{00}(t)\rangle = \int_0^{1/2} 2\mathrm{d}t - \int_{1/2}^{1} 1\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

因此

153

$$y(t) = \frac{3}{2}\varphi_{00}(t) + \frac{1}{2}\psi_{00}(t)$$ ■

为了用 MATLAB 执行这个例子，我们对每一个波形进行 N 次采样，用 $N\times 1$ 的矩阵来代替连续时间函数. 下面的程序计算当 $N=64$ 时的系数.

```
N = 64;
s = ones(1,N/2);
y = [2*s s];
p0 = [s s];
s0 = [s -s];
a1 = y*p0'/N;
a2 = y*s0'/N;
```

程序中，p0$=\varphi_{00}(t)$，s0$=\psi_{00}(t)$. 因为 y 和 p0 都是行向量，所以它们的内积为 y * p0′. 用采样次数除内积是为了对内积进行规范化. 其他语句不难理解，在此不赘述.

例 8.6 设 V_1 是所有长度为 2 的离散时间信号的集合，例如，$v(n)=\{2, -1\}$是 V_1 中的信号. 令 V_0 是 V_1 的子集，V_0 中的信号的两个信号值相等，例如 $\varphi_{00}(n)=\{1, 1\}$是 V_0 中的信号.

(a)说明 V_0 是 V_1 的一个子空间.

(b)求正交补 $W_0=V_0^{\perp}$，并选取 W_0 的一个元素作为 $\psi_{00}(n)$.

(c)说明 $\varphi_{00}(n)$和 $\psi_{00}(n)$一起构成 V_1 的一个基.

解 (a)因为零向量{0, 0}属于 V_0，且 V_0 中向量的线性组合也属于 V_1，所

以 V_0 是 V_1 的一个子空间．也就是说，若 $v_1(n)=\{a, a\}$，$v_2(n)=\{b, b\}$，则 $v_1(n)+v_2(n)$的两个信号值也相等，因此它也属于 V_0．由于 V_1 是向量空间，V_0 是 V_1 的一个子集，因此 V_0 自动继承了向量空间的其他性质．

(b)正交补 $W_0=V_0^{\perp}$ 是 V_1 中所有满足下列条件的向量的集合：集合中的向量与 V_0 中任意向量正交．这意味着一个信号 $\psi_{00}(n)$要属于 W_0，必须满足两个条件：(1)$\psi_{00}(n)$必须属于 V_1，(2)$\psi_{00}(n)$必须与 V_0 中所有元素正交．因此，$\psi_{00}(n)$的长度必须为 2，并且它与 V_0 中任意元素的内积必须为零．$\psi_{00}(n)=\{1, -1\}$同时满足这两个条件．

154

(c)$\varphi_{00}(n)$和 $\psi_{00}(n)$一起构成 V_1 的一个基，这是因为任意长度为 2 的信号都能被表示为这两个信号的线性组合．也就是说，对于任意长度为 2 的信号 $v(n)$，只可能找到唯一的标量 a_1 和 a_2，满足

$$v(n) = a_1\varphi_{00}(n) + a_2\psi_{00}(n)$$

这也说明，V_1 中的任意向量要么属于 V_0，要么属于 W_0，所以

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$



练习 8.2 令 $v(t)=-u(t)+3u(t-0.5)-2u(t-1)$，其中 $u(t)$是熟知的单位阶跃函数．将 $v(t)$表示为例 8.5 中的基函数的线性组合．

答案：$v(t)=1/2\varphi_{00}(t)-3/2\psi_{00}(t)$．

例 8.7 用图 8-7 和图 8-8 中的函数 $\varphi_{00}(t)$和 $\psi_{00}(t)$近似地表示 $y(t)=1+\sin(2\pi t)$，求系数．

解

$$a_1 = \langle y(t) \mid \varphi_{00}(t)\rangle = \int_0^1 [1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t = 1$$

$$a_2 = \langle y(t) \mid \psi_{00}(t)\rangle = \int_0^{1/2} [1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 [1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$$

因此

$$y(t) \approx \varphi_{00}(t) + (2/\pi)\psi_{00}(t)$$

执行下面的 MATLAB 程序将得到图 8-9 所示的图形．矩形波形是 $\varphi_{00}(t)+(2/\pi)\psi_{00}(t)$，它是对正弦波 $y(t)$最好的逼近．

```
N = 64;
s = ones(1,N/2);
t = linspace(0,1,N);
y = 1+sin(2*pi*t);
p0 = [s s];
s0 = [s -s];
```

155

```
a1 = y*p0'/N;
a2 = y*s0'/N;
v = a1*p0 + a2*s0;
plot(t,y,t,v)
```

该程序计算出的 a_1 和 a_2 并不是它们的真实值. 因为我们使用的是 $y(t)$的采样，所以会引入误差. a_2 的真实值为 $2/\pi=0.6366$，而程序中得到的是 $a_2=0.6265$. 若将 N 提高到 256，则 $a_2=0.6341$. 因此，要想提高精度，必须使用大的 N.

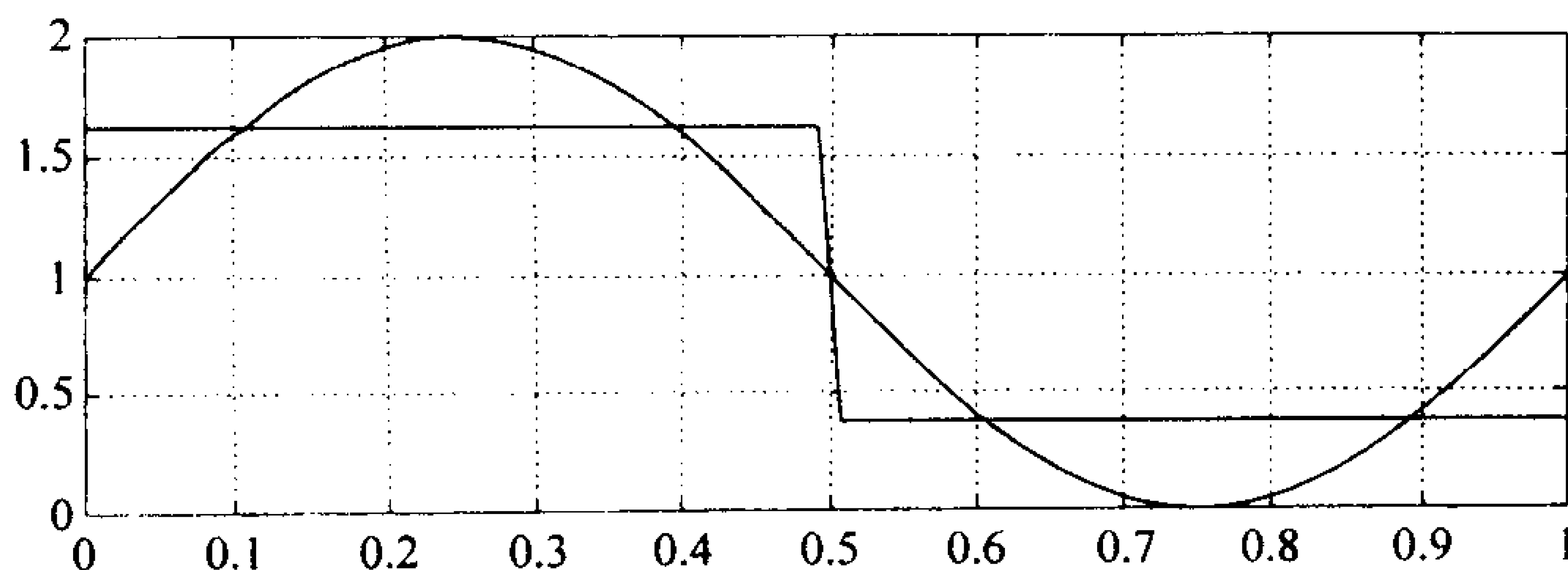


图 8-9 用 $\varphi_{00}(t)+(2/\pi)\psi_{00}(t)$逼近正弦波 ■

下面我们回顾一下与波形相关的一些记号. 令 $v(t)$是图 8-10a 所示的波形，则 $v(2t)$，$v[2(t-1)]$，$v(2t-1)$的波形分别如图 8-10b，c，d 所示.

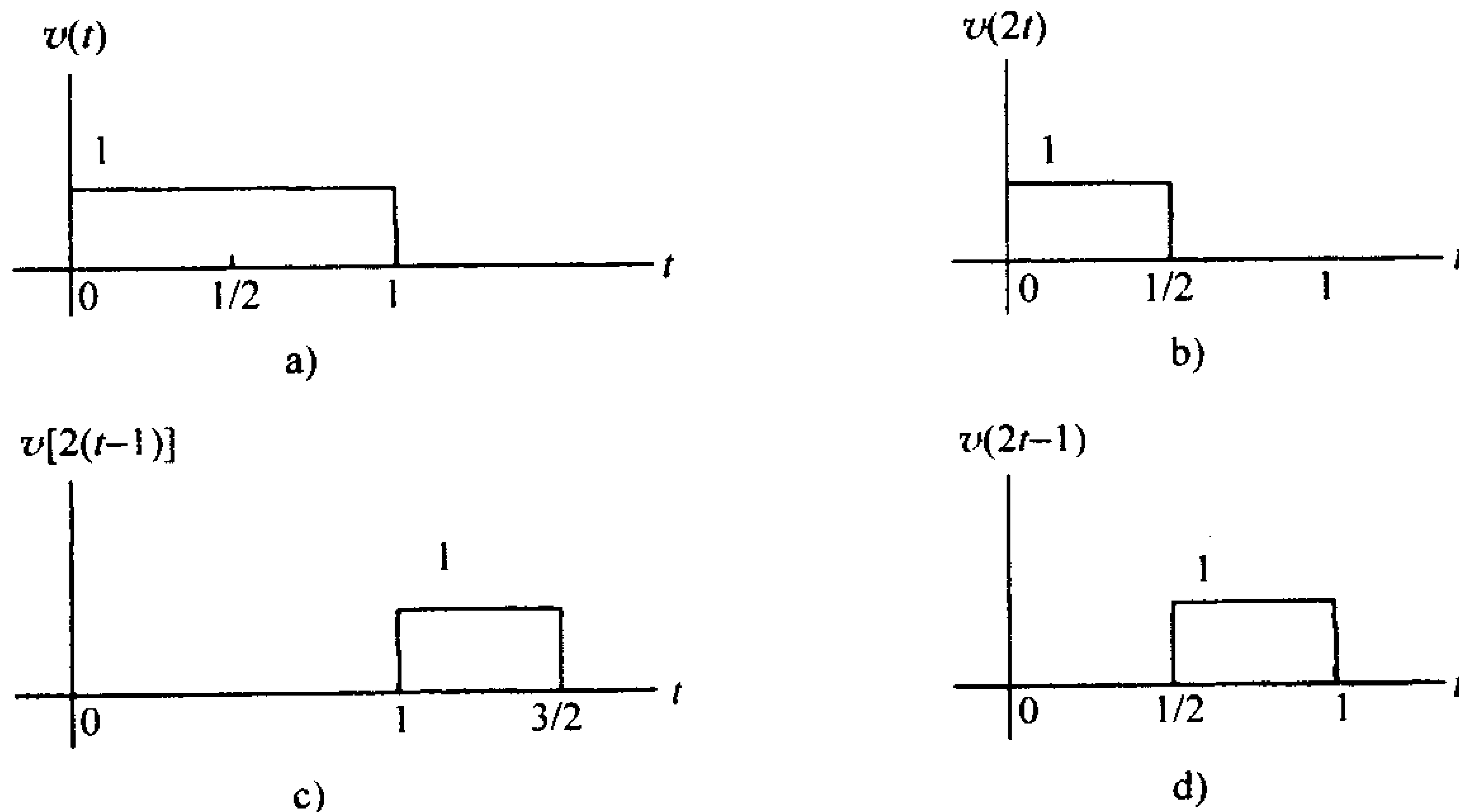


图 8-10 $v(t)$的伸缩与平移

练习 8.3 假设 $v(t)=e^{-t}u(t)$，画出 $v(t)$，$v(2t)$，$v[2(t-1)]$，$v(2t-1)$的波形.

答案：图 8-11.

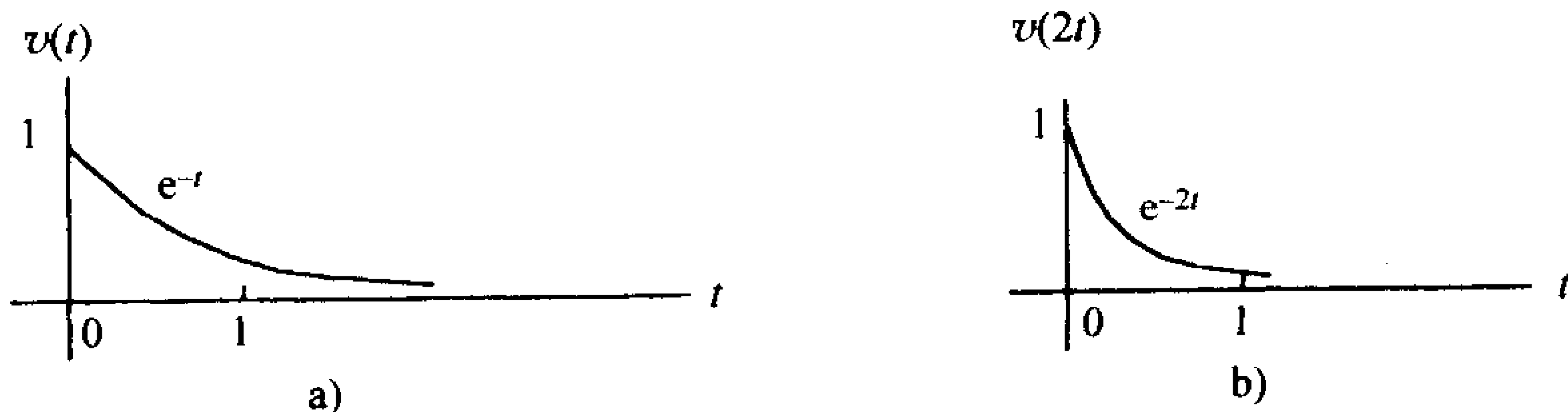


图 8-11 练习 8.3 答案



图 8-11 （续）

好的记号对于保证思路的清晰很重要，原来的记号 $V_1=V_0 \oplus V_0^{\perp}$ 使用起来并不方便. 在对子空间、直和和正交补等相关概念展开讨论之前，我们有必要对记号进行一些约定. 在接下来的例子中，我们将使用一个更好的记号. 记

$$W_0 = V_0^{\perp}$$

那么有

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

156 ~ 157

参照图 8-12，若 $\varphi_{00}(t)$和 $\psi_{00}(t)$构成 V_1 的一组基，那么 V_0 由 $\varphi_{00}(t)$与常数的乘积组成，W_0 由 $\psi_{00}(t)$与常数的乘积组成，而 V_1 由 $\varphi_{00}(2t-k)$(其中 $k=0$，1)与常数的乘积组成. 这就是说，V_1 不仅只有基$\{\varphi_{00}(t), \psi_{00}(t)\}$，$\{\varphi_{00}(2t), \varphi_{00}(2t-1)\}$也是它的基.

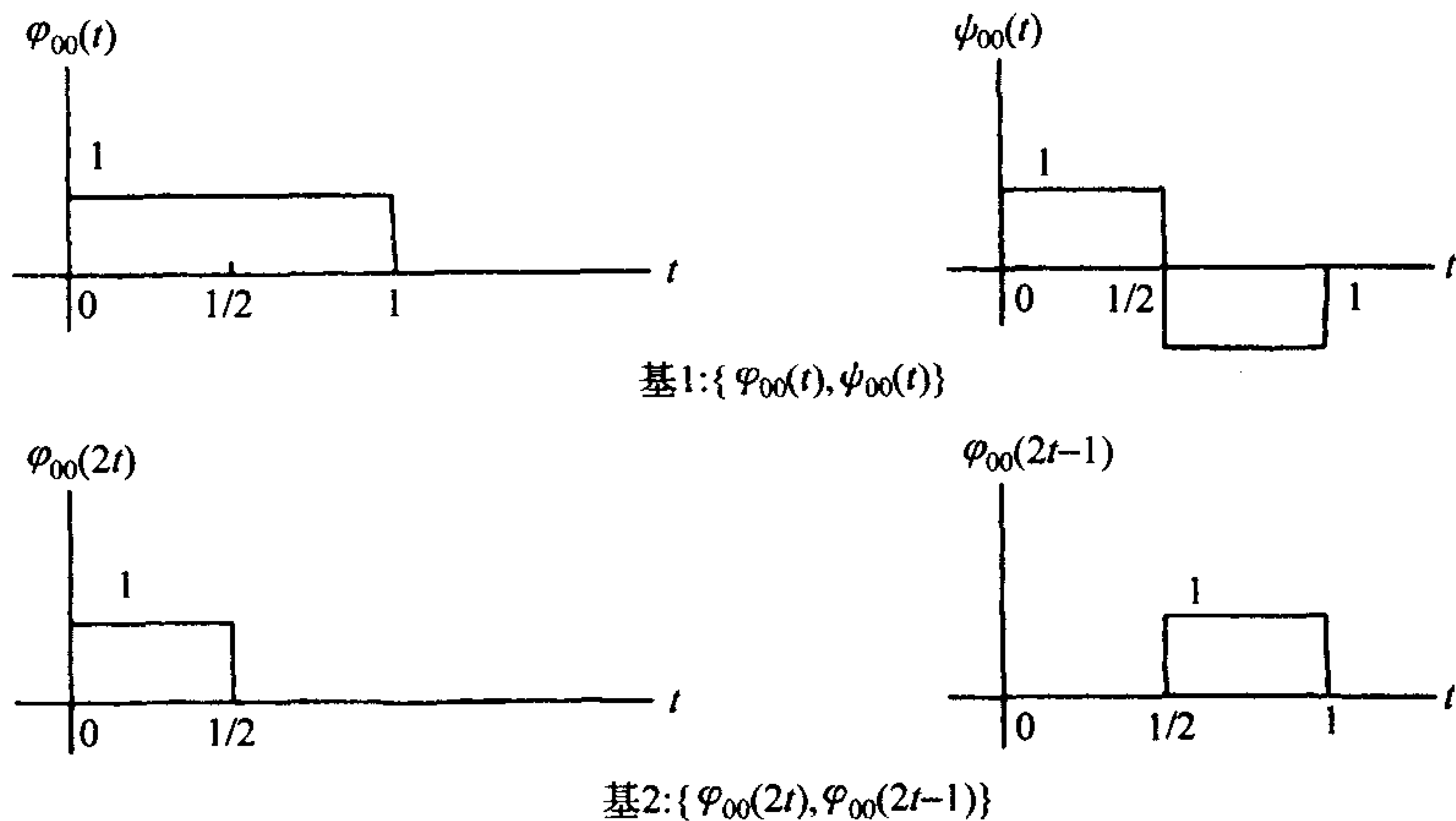


图 8-12 基 1 和基 2

注意到

$$\varphi_{00}(t) = \varphi_{00}(2t) + \varphi_{00}(2t-1)$$

和

$$\psi_{00}(t) = \varphi_{00}(2t) - \varphi_{00}(2t-1)$$

因为$\{\varphi_{00}(t),\ \psi_{00}(t)\}$能够被表示为$\{\varphi_{00}(2t),\ \varphi_{00}(2t-1)\}$的线性组合，因此$\{\varphi_{00}(2t),\ \varphi_{00}(2t-1)\}$也一定是$V_1$的基.

为了更多地探求第二组基的实质，记

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi_{00}(2^j t - k) \tag{8-8}$$

158 其中，因子$2^{j/2}$用于将每一个函数规范为具有单位能量(范数为 1). 上式意味着

$$j = 0, k = 0, 2^0\varphi_{00}(2^0 t - 0) = \varphi_{00}(t)$$

$$j = 1, k = 0, 2^{1/2}\varphi_{00}(2^1 t - 0) = \sqrt{2}\varphi_{00}(2t)$$

$$j = 1, k = 1, 2^{1/2}\varphi_{00}(2^1 t - 1) = \sqrt{2}\varphi_{00}(2t-1)$$

$$j = 2, k = 0, 2^1\varphi_{00}(2^2 t - 0) = 2\varphi_{00}(4t)$$

……

其中k的范围是 0 至2^j-1. 理想情况下，j从 0 到∞，但实际中，j的上限由它的采样率决定. 在实际计算小波系数时我们是从另一端开始的，即从最大的分辨率开始计算，直到最小的分辨率为止，而不是从$j=0$开始到j的最大值为止，稍后我们将进一步讨论. 图 8-13 是基 2 的图示.

$$\varphi_{10}(t) = \sqrt{2}\varphi_{00}(2t) \quad 和 \quad \varphi_{11}(t) = \sqrt{2}\varphi_{00}(2t-1)$$

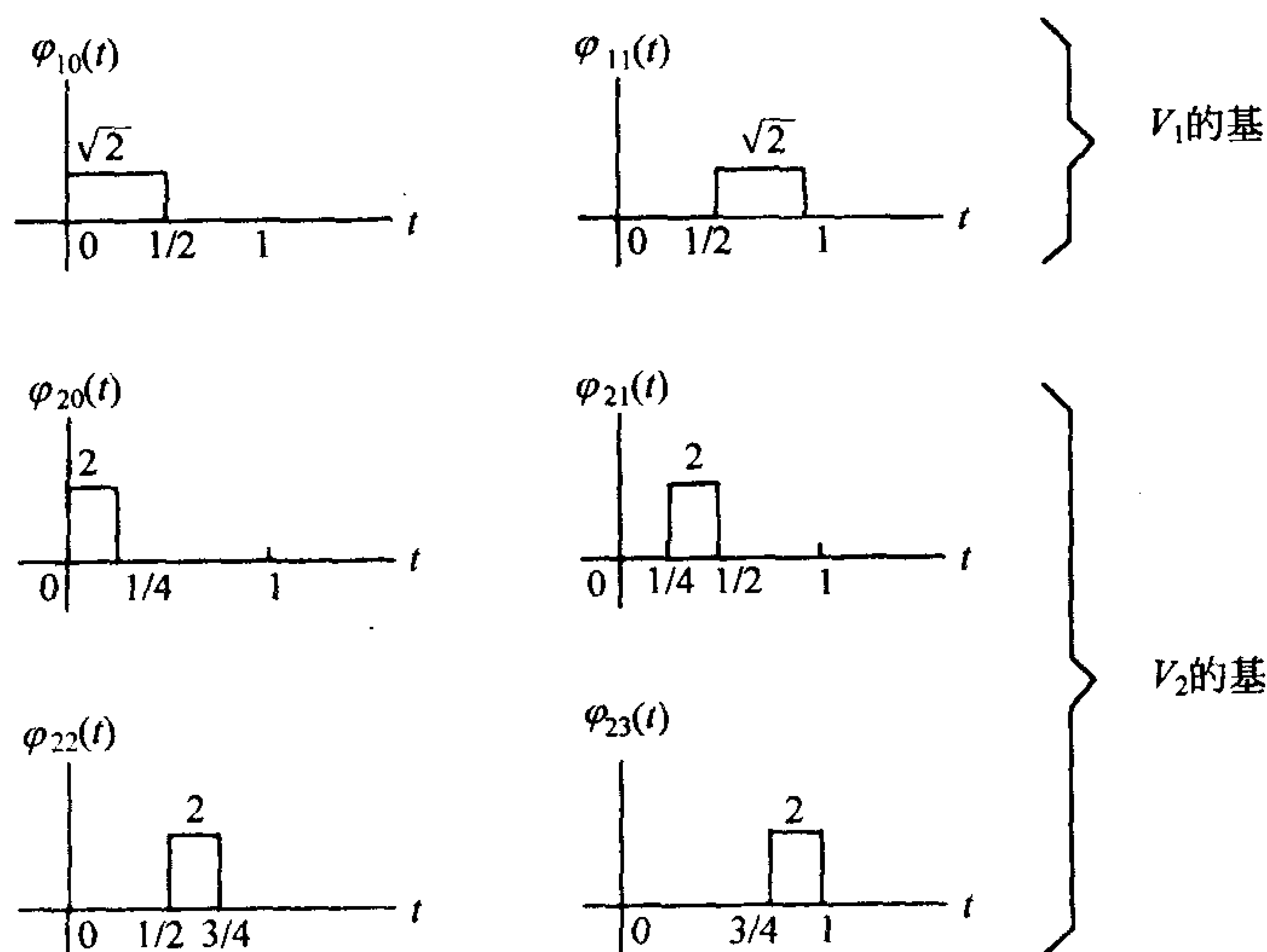


图 8-13 V_1 和 V_2 的基

到目前为止，我们的讨论都只局限在 V_0 和 V_1 上．为了定义区间 $0\leqslant t<1$ 上更精细的结构，我们令 V_2 是区间 $0\leqslant t<1/4$，$1/4\leqslant t<1/2$，$1/2\leqslant t<3/4$，$3/4\leqslant t<1$ 上的分段常数函数．图 8-13 是这些函数 φ_{2k} 的图示．由式(8-8)有

159

$$\varphi_{2k}(t)=2\varphi_{00}(4t-k),\quad k=0,1,2,3$$

函数 $\varphi_{1k}(t)$ 构成 V_1 的基，而函数 $\varphi_{2k}(t)$ 构成 V_2 的基．注意，虽然 V_1 的每一个向量都可以表示为 $\varphi_{2k}(t)$ 的线性组合，但 $\varphi_{2k}(t)$ 不是 V_1 的基．为什么？这是因为集合 $\{\varphi_{2k}(t)\}$ 中包含的向量太多．要成为一个基，该集合中只能包含两个向量．[⊖]

函数 $\varphi_{1k}(t)$ 构成 V_1 的基，而函数 $\varphi_{2k}(t)$ 构成 V_2 的基，依此类推．由此导致了式(8-8)定义的基函数所构成的向量空间之间的层次关系如下：

$$V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset L^2 \tag{8-9}$$

其中，L^2 是所有能量信号的集合．

函数 $\{\varphi_{jk}\}$ 被称为尺度函数（scaling function），而函数 $\{\psi_{jk}\}$ 被称为小波（wavelet）．尺度函数构成 V_j 的基，小波构成 $W_j=V_j^{\perp}$ 的基．类似于尺度函数，小波 $\psi_{jk}(t)$ 被定义为

$$\psi_{jk}(t)=2^{j/2}\psi_{00}(2^jt-k) \tag{8-10}$$

图 8-14 所示是 $j=1$ 和 $j=2$ 时的哈尔小波．

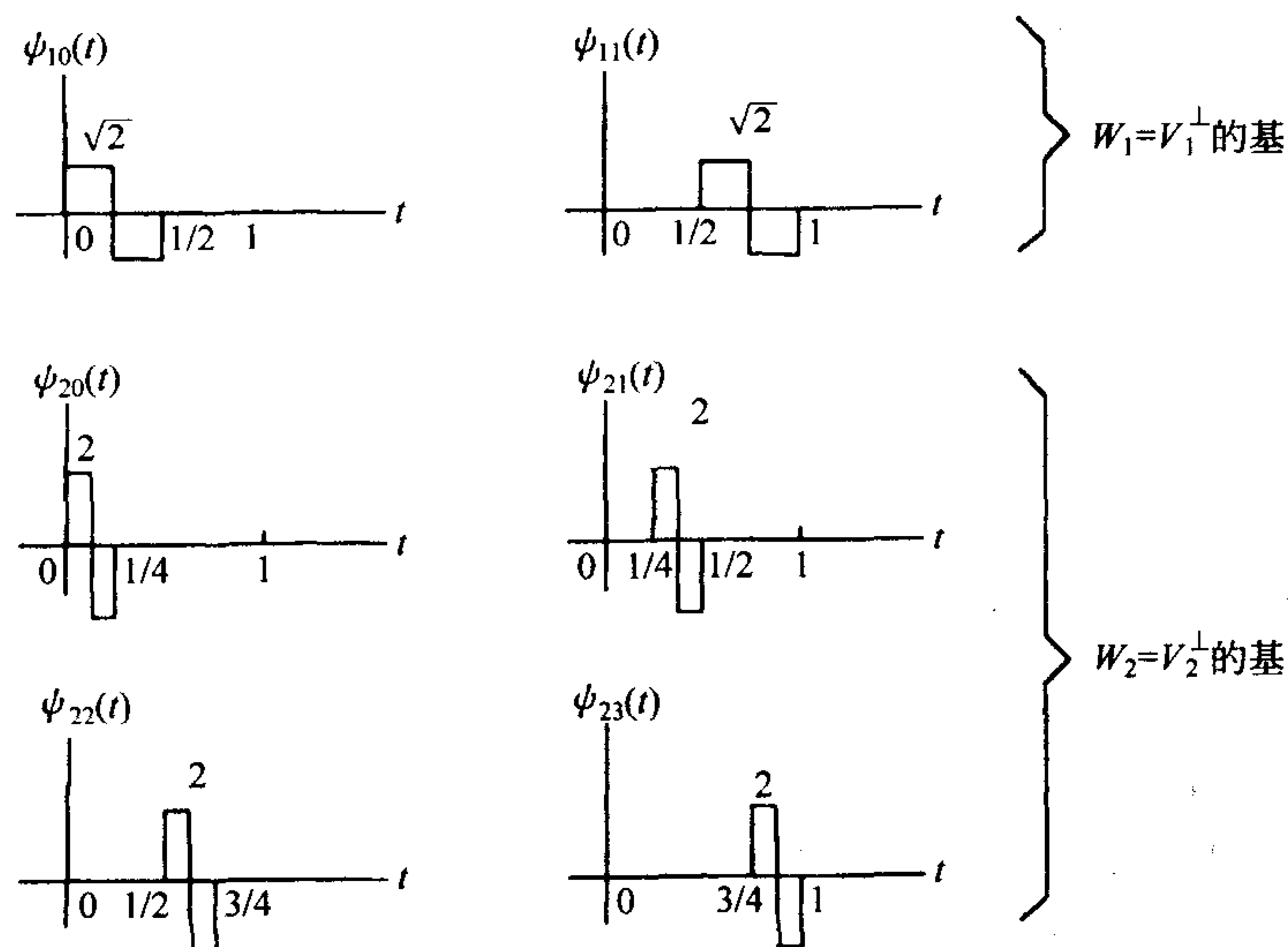


图 8-14　$j=1$ 和 $j=2$ 时的哈尔小波

尺度函数与小波的组合构成了更高一层空间的基（即 $V_0+V_0^{\perp}$ 构成 V_1 的基，$V_1+V_1^{\perp}$ 构成 V_2 的基，依次类推）．但是，我们也可以用其他的组合，例如：尺度函数本身，或尺度函数加小波，或所有小波加一个表示波形直流分量的尺度函

⊖ 更本质的原因是 $\varphi_{2k}(t)$ 不属于 V_1．——译者注

数 $\varphi_{00}(t)$. 为了保证基向量彼此正交，在选择基时必须谨慎行事. 正交性是傅里叶级数所具备的性质，它可以使变换变得简单. 小波变换使用 $\varphi_{00}(t)$和所有小波 $\psi_{jk}(t)$作为基. 换句话说，选择

$$V_0 = \text{所有 } \varphi_{00}(t) \text{ 与标量的乘积}$$

$$V_0^{\perp} = W_0 \cup W_1 \cup W_2 \cup \cdots$$

即，$V_0^{\perp}$ 由所有$\{\psi_{jk}\}$的标量倍组成，其中 j，k 任意. 这使得在所有分辨率下任意基向量都与其他基向量正交. 要看清这一点，我们从如下两个方面进行考察：

1. 这样选择的基使得向量空间呈现如下层次关系：

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset L^2$$

2. 每一个向量空间 V_i 都可以被分解为 $V_i = V_{i-1} \oplus W_{i-1}$，其中 W_{i-1}是 V_{i-1}的正交补 $V_{i-1}^{\perp}$. 这意味着 V_i 有一个基由 V_{i-1}的基与 W_{i-1}的基组合而成. 例如，V_2 有基

$$\beta_2 = \{\varphi_{00}, \psi_{00}, \psi_{10}, \psi_{11}\}$$

V_3 有一个基由 β_2 加上那些构成 W_2 的基的小波组成. 即有

$$\beta_3 = \{\varphi_{00}, \psi_{00}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}\}$$

160 ≀ 161

这些例子说明了构造更高一层分辨率的基的方法.

练习 8.4　构造 V_4 的一个小波基.

答案：β_4 由 β_3 加上小波 $\psi_{3k}(k=0, 1, \cdots, 7)$组成.

8.2　离散小波变换

傅里叶变换有 3 种定义，类似地，小波变换的定义也有 3 种.

1. *离散小波变换*(discrete wavelet transform，DWT)将连续时间函数映射为一个数集，这类似于傅里叶级数将连续时间信号映射为一个数集.（从这个意义上来说，它更应该叫做小波级数.）

2. 小波变换的另一种形式是将连续时间信号映射为连续函数，这类似于连续时间能量信号的傅里叶变换.

3. 小波变换的第 3 种形式是将离散时间信号映射为一个数集，类似于 DTFS.

本节专门讨论 DWT，它将连续时间函数映射为数. 前向(分解)方程为

$$c_{jk} = \langle v(t) \mid \varphi_{jk}(t) \rangle$$

$$d_{jk} = \langle v(t) \mid \psi_{jk}(t) \rangle \tag{8-11}$$

反向(合成)方程为

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{Jk}\varphi_{Jk}(t) + \sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk}\psi_{jk}(t) \tag{8-12}$$

其中 J 是起始指标(通常 $J=0$). 分解方程将一个给定的波形 $v(t)$ 分解(解析)为它的组成部分(积木)c_{jk} 和 d_{jk}，图 8-15a 是这一过程的示意图. 合成方程利用这些组成部分 c_{jk} 和 d_{jk} 搭建(合成)函数 $v(t)$，图 8-15b 给出了这一过程的示意图.

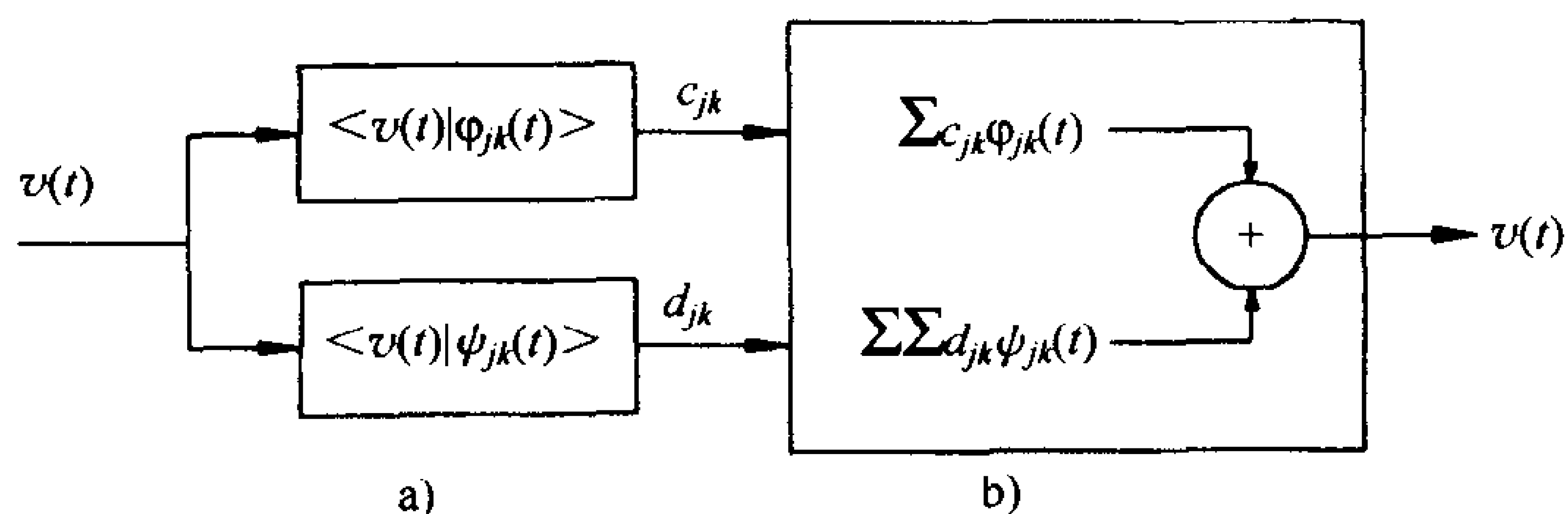


图 8-15 小波正变换和小波逆变换

例 8.8 以图 8-17 所示的 4 个函数为基，求图 8-16 所示的函数的小波变换.

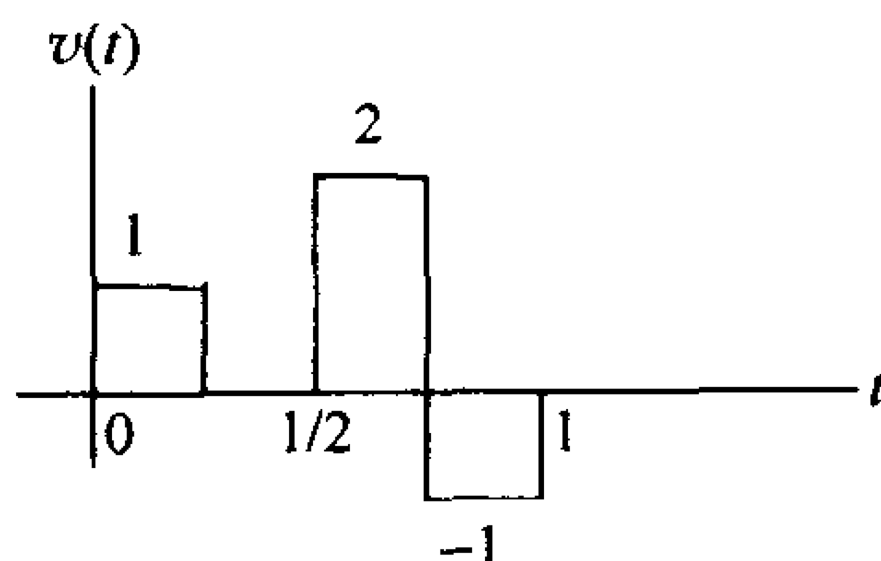


图 8-16 函数 $v(t)$

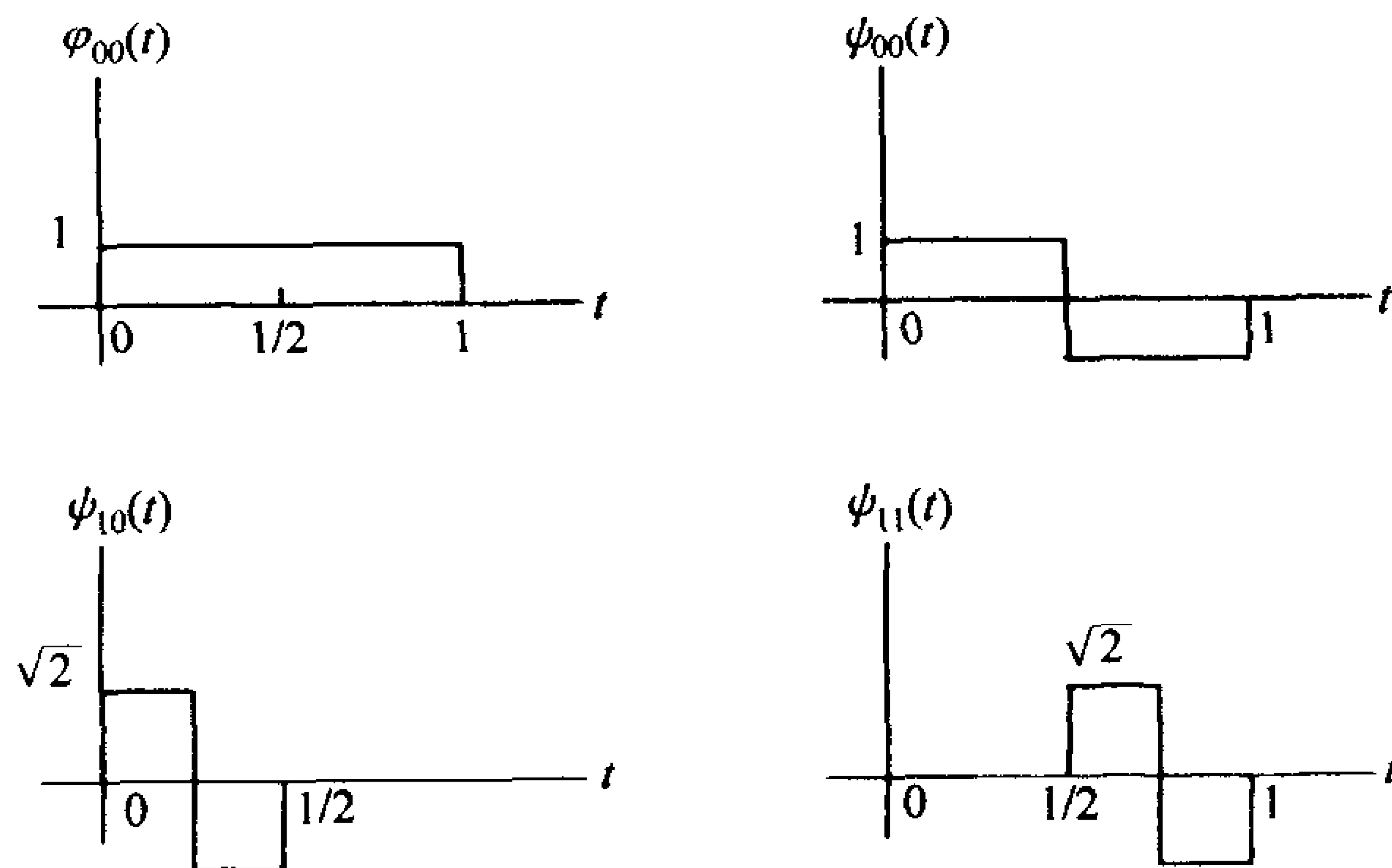


图 8-17 例 8.8 的基函数

解 由前向(分解)方程(8-8),有

$$c_{00}=\langle v(t)\mid\varphi_{00}(t)\rangle=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$d_{00}=\langle v(t)\mid\psi_{00}(t)\rangle=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=0$$

$$d_{10}=\langle v(t)\mid\psi_{10}(t)\rangle=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

162~163

$$d_{11}=\langle v(t)\mid\psi_{11}(t)\rangle=\frac{2\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

从而

$$v(t)=\frac{1}{2}\varphi_{00}(t)+\frac{\sqrt{2}}{4}\psi_{10}(t)+\frac{3\sqrt{2}}{4}\psi_{11}(t)$$ ■

例 8.9 利用例 8.8 中的哈尔小波系数求函数 $v(t)=1+\sin(2\pi t)$的尺度函数和直到第 2 层的小波系数.

解 图 8-18 所示为尺度函数和母小波. 第 0 层系数为

$$c_{00}=\langle v(t)\mid\varphi_{00}(t)\rangle=\int_0^1[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t=1$$

$$\begin{aligned}d_{00}&=\langle v(t)\mid\psi_{00}(t)\rangle\\&=\int_0^{1/2}[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t-\int_{1/2}^1[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t=0.6366\end{aligned}$$

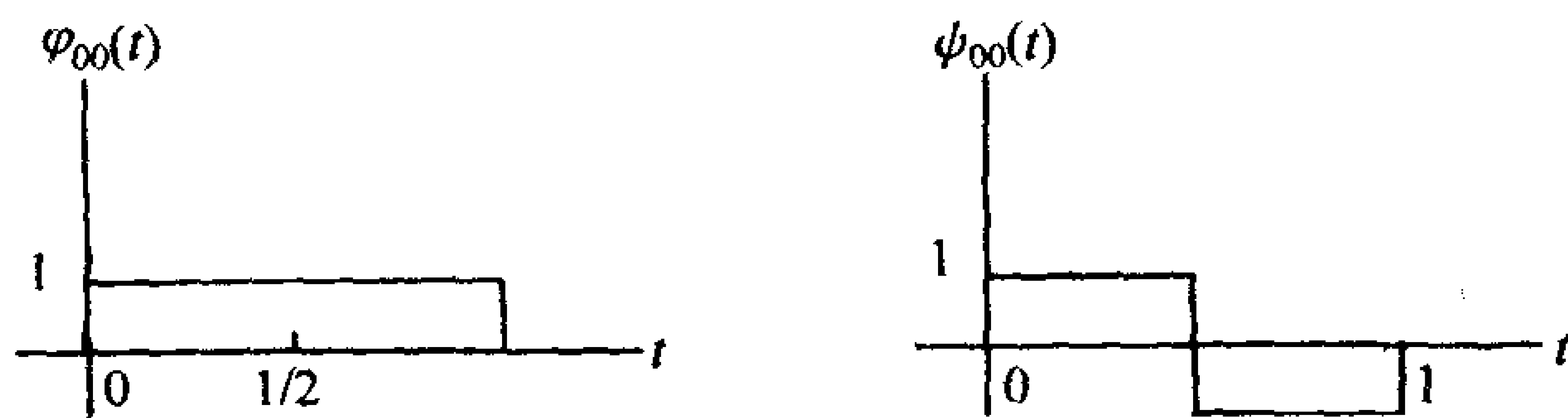


图 8-18 哈尔尺度函数与母小波

图 8-19 给出了第 1 层尺度函数和小波函数. 它们与 $v(t)$的内积为

$$c_{10}=\langle v(t)\mid\varphi_{10}(t)\rangle=\int_0^{1/2}\sqrt{2}[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t=1.1573$$

164

$$c_{11}=\langle v(t)\mid\varphi_{11}(t)\rangle=\int_{1/2}^1\sqrt{2}[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t=0.2570$$

$$d_{10}=\langle v(t)\mid\psi_{10}(t)\rangle$$

$$=\int_0^{1/4}\sqrt{2}[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t-\int_{1/4}^{1/2}\sqrt{2}[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t=0$$

$$d_{11}=\langle v(t)\mid\psi_{11}(t)\rangle$$

$$=\int_{1/2}^{3/4}\sqrt{2}[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t-\int_{3/4}^{1}\sqrt{2}[1+\sin(2\pi t)]\mathrm{d}t=0$$

类似地，第 2 层系数为

$$c_2=\begin{bmatrix}c_{20}\\c_{21}\\c_{22}\\c_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8183\\0.8183\\0.1817\\0.1817\end{bmatrix}\qquad d_2=\begin{bmatrix}d_{20}\\d_{21}\\d_{22}\\d_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1319\\0.1319\\0.1319\\-0.1319\end{bmatrix}$$

因此，$v(t)$可以表示为

$$v(t)=1+\sin(2\pi t)\cong c_{00}\varphi_{00}(t)+d_{00}\psi_{00}(t)+d_{10}\psi_{10}(t)+d_{11}\psi_{11}(t)$$
$$+d_{20}\psi_{20}(t)+d_{21}\psi_{21}(t)+d_{22}\psi_{22}(t)+d_{23}\psi_{23}(t)$$

即

$$v(t)\cong\varphi_{00}(t)+0.6366\psi_{00}(t)-0.1313\psi_{20}(t)$$
$$+0.1319\psi_{21}(t)+0.1319\psi_{22}(t)-0.1319\psi_{23}(t)$$

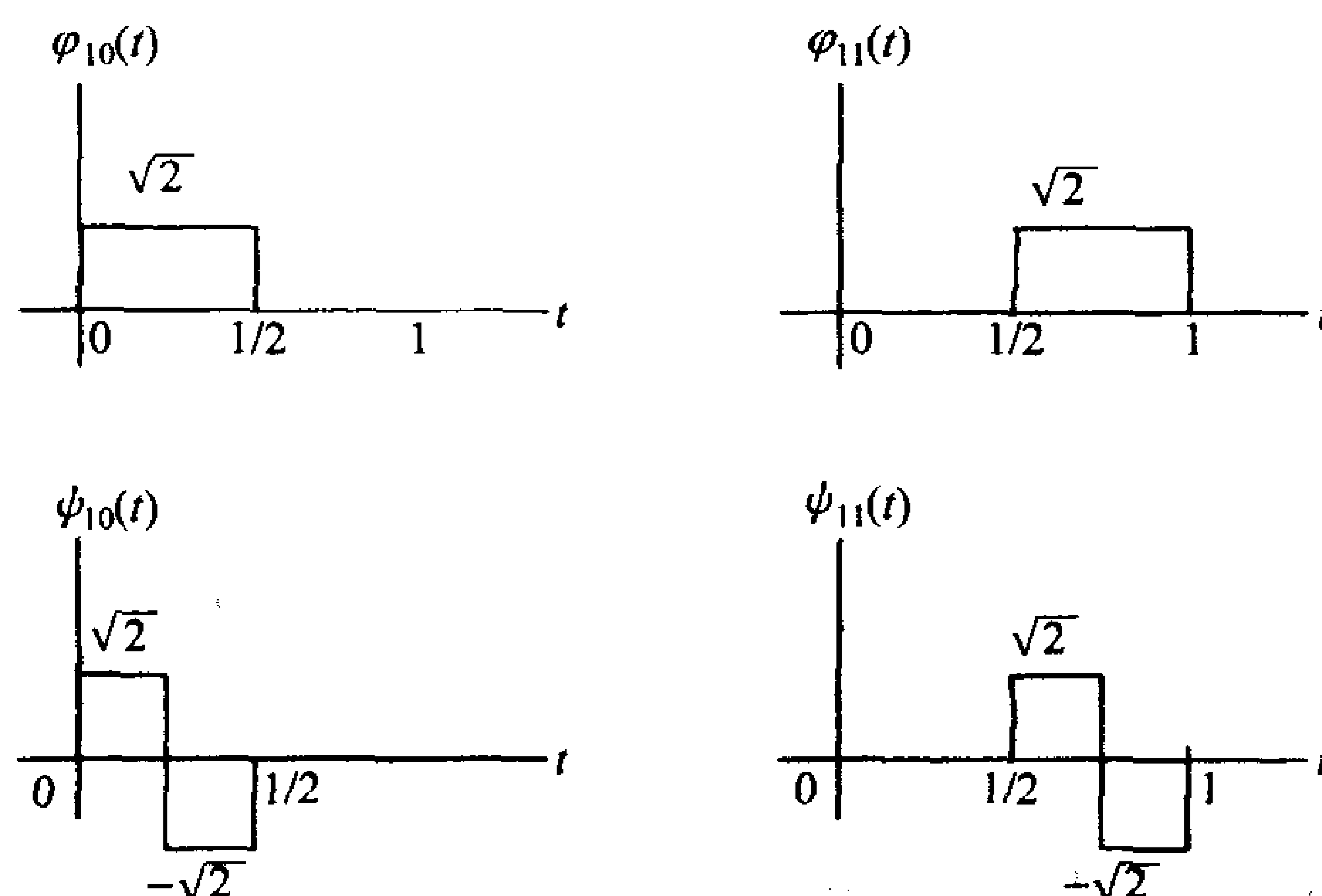


图 8-19 第 1 层尺度函数和小波函数

以下的 MATLAB 程序执行的结果如图 8-20 所示，其中用到的符号与以前程序中所使用的符号类似.

```
N = 16384;
t = linspace(0,1,N);
y = 1 + sin(2*pi*t);
e0 = ones(1,N/2);
e1 = ones(1,N/4);
e2 = ones(1,N/8);
p0 = [e0 e0];
s0 = [e0 -e0];
c0 = y*p0'/N;
d00 = y*s0'/N;
s10 = sqrt(2)*[e1 -e1 zeros(1,N/2)];
s11 = sqrt(2)*[zeros(1,N/2) e1 -e1];
d10 = y*s10'/N;
d11 = y*s11'/N;
s20 = 2*[e2 -e2 zeros(1,3*N/4)];
s21 = 2*[zeros(1,N/4) e2 -e2 zeros(1,N/2)];
s22 = 2*[zeros(1,N/2) e2 -e2 zeros(1,N/4)];
s23 = 2*[zeros(1,3*N/4) e2 -e2];
d20 = y*s20'/N;
d21 = y*s21'/N;
d22 = y*s22'/N;
d23 = y*s23'/N;
v = c0*p0 + d00*s0 +d10*s10 + d11*s11 + d20*s20...
+ d21*s21 + d22*s22 + d23*s23
subplot(2,1,1)
plot(t,y,t,v)
grid on
```

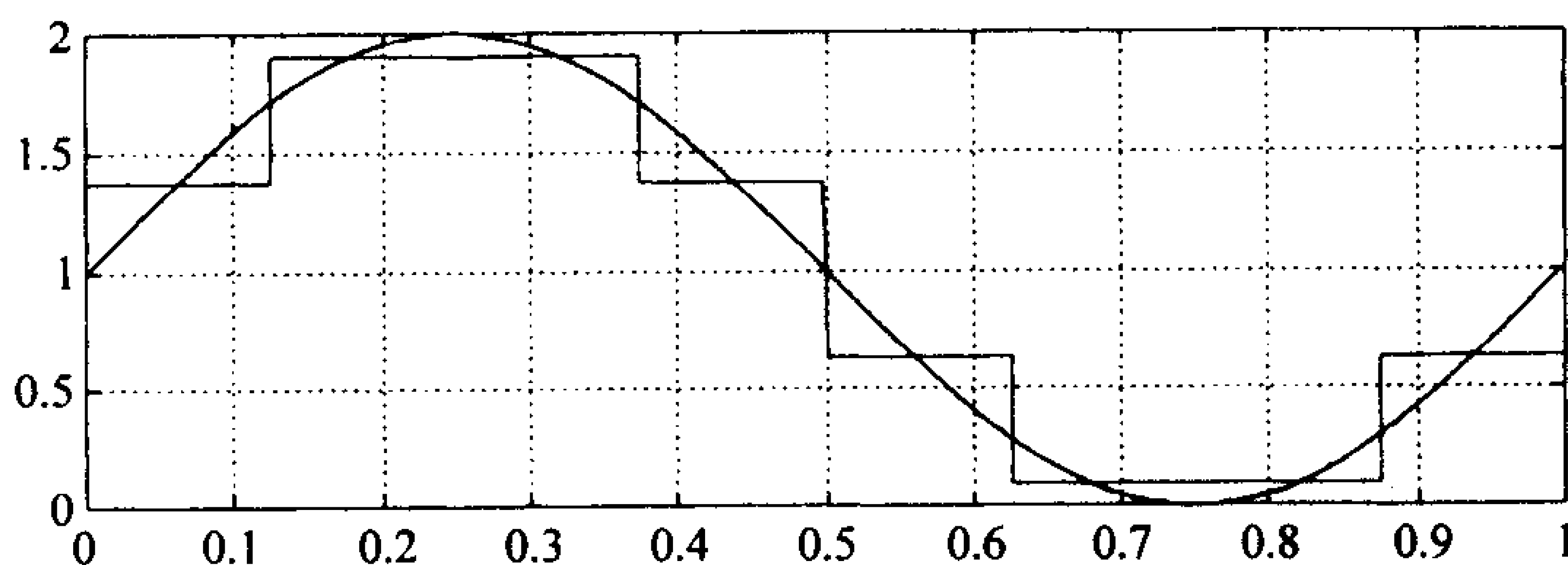


图 8-20　$j=2$ 时对 $v(t)=1+\sin(2\pi t)$ 的逼近 ■

到目前为止，我们还只讨论了哈尔小波，其小波函数和尺度函数如图 8-12 所示. 在进一步讨论其他小波函数之前，我们将已经涉及的一些概念进行一下梳理.

1. 小波的构造需要用到尺度函数. 尺度函数 $\varphi(t)$ 可以被表示为 $\varphi(2t-k)$ 的线性组合. $\varphi(2t-k)$ 是 $\varphi(t)$ 压缩一半(half-scaled)后再作 $k/2$ 平移后的结果. 尺度函数的线性组合表示为

$$\varphi(t) = \sum_k h_0(k)\sqrt{2}\varphi(2t-k) \tag{8-13}$$

其中$\sqrt{2}h_0(k)$是将函数 $\varphi(2t-k)$与 $\varphi(t)$关联起来的系数．该方程被称为 φ 的二尺度关系(two-scale relation)，而系数$\sqrt{2}h_0(k)$被称为 φ 的二尺度序列(two-scale sequence)．(下面将会给出一些例子来说明式(8-13)．)

2. 子空间 V_0 由 $\varphi_0(t)$以及 $\varphi_0(t)$平移整数单位后所得函数张成．

3. 式(8-5)中的函数

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi_0(2^j t - k)$$

张成空间 V_j．式(8-13)所表示的二尺度关系产生一个嵌套的子空间序列

$$\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

←粗　　　细→

此序列被称为*多分辨率分析*(multiresolution analysis，MRA)．

4. 空间 V_j 和它的正交补 W_j 均为 V_{j+1}的子集，即

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

165～167

给定 V_j 中的一个尺度函数 φ，MRA 的基本思想是：存在 W_j 中的另一个函数 ψ，称为小波，其中

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi_{00}(2^j t - k)$$

因为 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$，所以 ψ 可以用 $\varphi(2t-k)$来表示，后者构成 V_{j+1}的基．下面关于 ψ 的关系类似于 φ 的二尺度关系：

$$\psi(t) = \sum_k h_1(k)\sqrt{2}\varphi(2t-k) \tag{8-14}$$

它被称为小波的二尺度关系．

例 8.10　给定两个函数 $\varphi(2t)$和 $\varphi(2t-1)$，如图 8-21 所示，给定滤波器 h_0 和 h_1 为

$$h_0(k) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$h_1(k) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

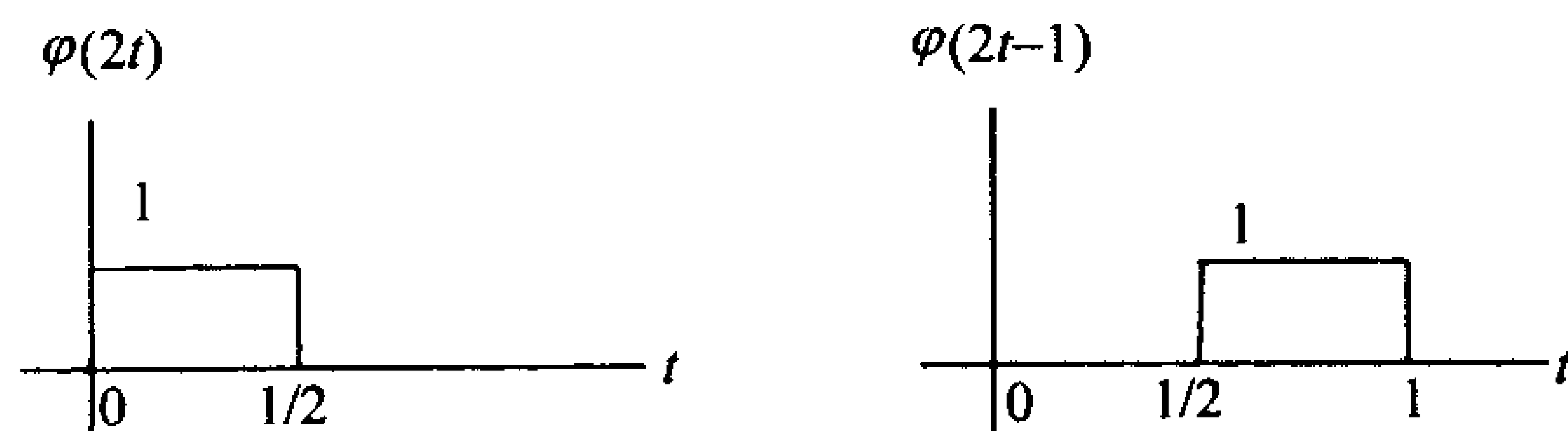


图 8-21　函数 $\varphi(2t)$和 $\varphi(2t-1)$

使用式(8-13)和式(8-14)求尺度函数 $\varphi(t)$和母小波 $\psi(t)$.

解

$$\varphi(t)=\sum_k h_0(k)\sqrt{2}\varphi(2t-k)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2t)}_{k=0}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2t-1)}_{k=1}=\varphi(2t)+\varphi(2t-1)$$

168

由此得到 $\varphi(t)$，如图 8-22a 所示. 又

$$\psi(t)=\sum_k h_1(k)\sqrt{2}\varphi(2t-k)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2t)}_{k=0}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2t-1)}_{k=1}=\varphi(2t)-\varphi(2t-1)$$

由此得 $\psi(t)$，如图 8-22b 所示.

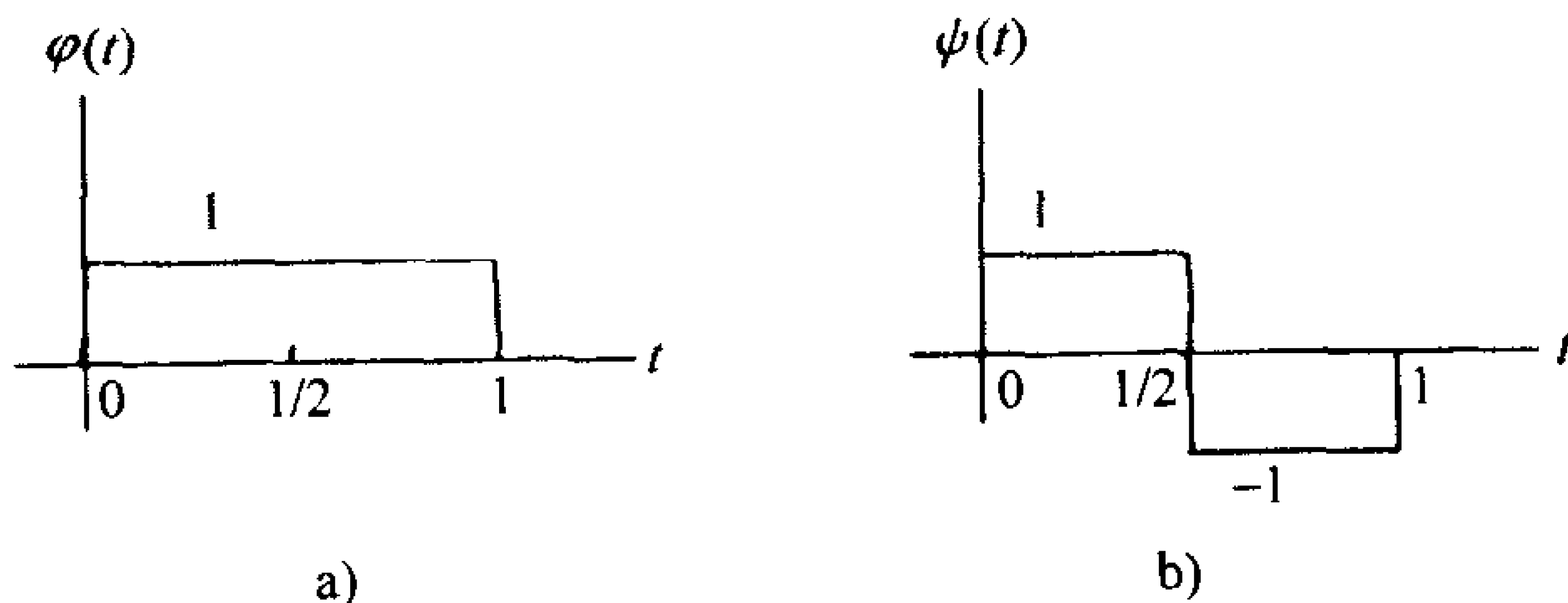


图 8-22 函数 $\varphi(t)$和 $\psi(t)$ ■

注意，式(8-13)和式(8-14)在任意尺度下都是适用的. 一组确定的系数 $h_0(k)$和 $h_1(k)$将一种分辨率下的尺度函数和小波与下一级分辨率下的尺度函数关联起来. 基于此，以及小波构成一个正交基这一事实，我们将在第 10 章引入一些非常有用的关系. 这些关系使得我们能够很容易地计算在所有尺度下的小波系数.

169

第9章　正交镜像滤波器

本章将引入研究小波变换所必需的一些概念．包括正交镜像滤波器(QMF)，全通滤波器，镜像奇点，最小相位、最大相位和线性相位滤波器．小波分析中的滤波器组是由 QMF 组成的．而最小相位、最大相位和线性相位滤波器的概念对理解 QMF 是如何被用于小波分析中是必要的．

本章目标　读完本章以后，读者应该掌握：

- 给定一个长度为 N 的有限持续时间信号 $V(z)$，画出对应于 $V(-z)$，$V(z^{-1})$，$z^{-N}V(-z^{-1})$的时间函数．
- 给定分母多项式 $D(z)$，写出全通滤波器传递函数的方程．
- 对给定的 $H(z)$，求最小相位传递函数．
- 给定 $H_0(z)$，求对应的 QMF 和共轭 QMF．
- 计算对称有限冲击响应滤波器的相位斜率．
- 确定一个给定的双通道滤波器组是否为完全重构滤波器．

9.1　全通滤波器[⊖]

有限冲击响应(FIR)滤波器的冲击响应持续时间是确定的．也就是说，经过某个确定的时间以后，冲击响应 $h(n)$将为零．图 9-1 所示的结构，其冲击响应为$h_0(n)=\{1,\ 1\}$，它可以被简单地表示为

$$h_0(n)=\delta(n)+\delta(n-1) \tag{9-1}$$

将输入信号 $v(n)=\delta(n)$乘 1 再加上它的一个延迟，就得到式(9-1)中的和．

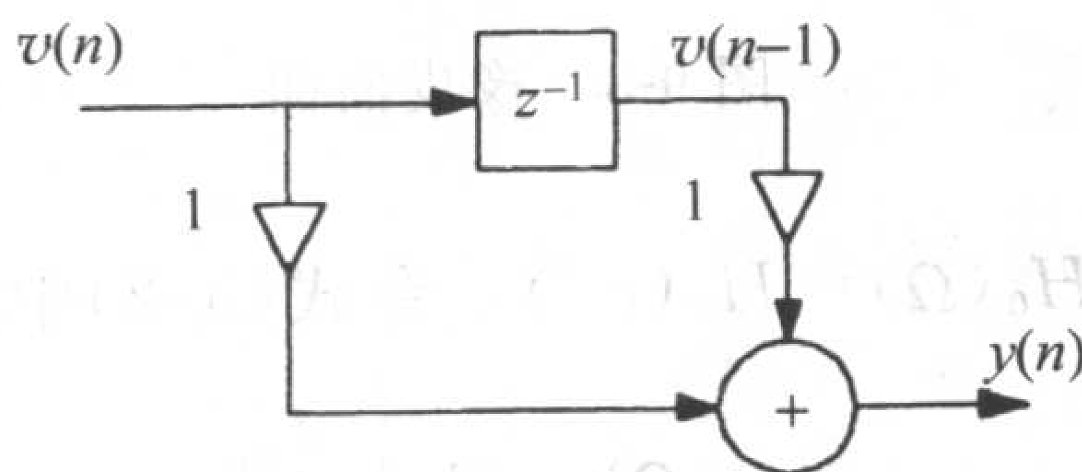


图 9-1　低通滤波器

⊖ 英文为“allpass networks”．networks 在这里指由彼此关联的滤波器所组成的滤波网器，所以本书不将 allpass networks 直译为“全通网络”，而将之意译为“全通滤波器”．——译者注

图 9-1 所示的结构是一个低通滤波器．为了说明这一点，我们将冲击响应 $h_0(n)$作 z 变换得传递函数 $H_0(z)$为

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z} \tag{9-2}$$

可以看到，传递函数包含一个极点 $z=0$ 和一个零点 $z=-1$，如图 9-2 所示．图 9-3所示是该零-极点分布在 z 平面上的幅度变化曲面(橡皮曲面)．

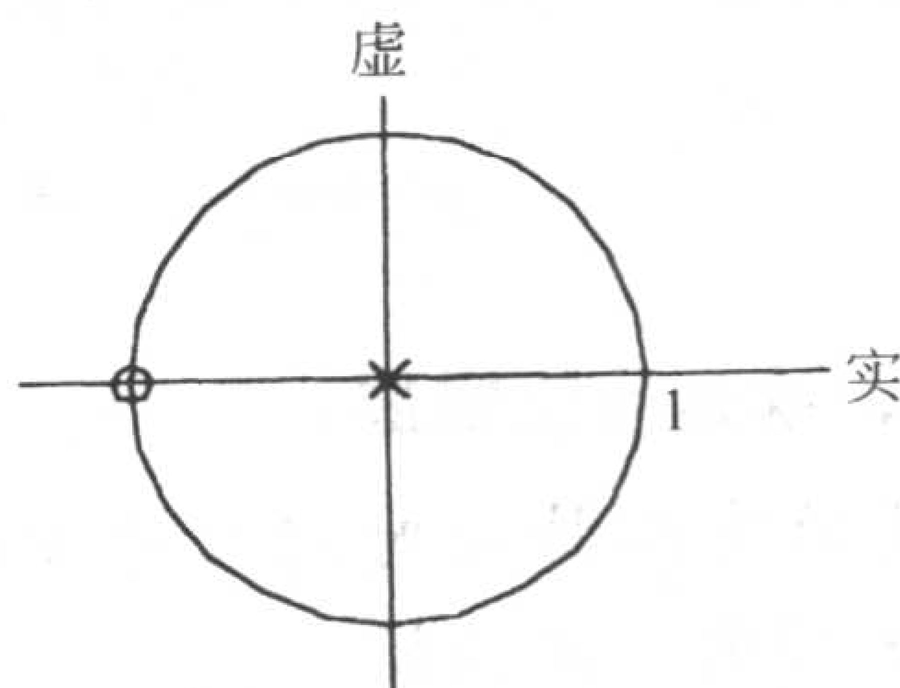


图 9-2　零-极点分布图

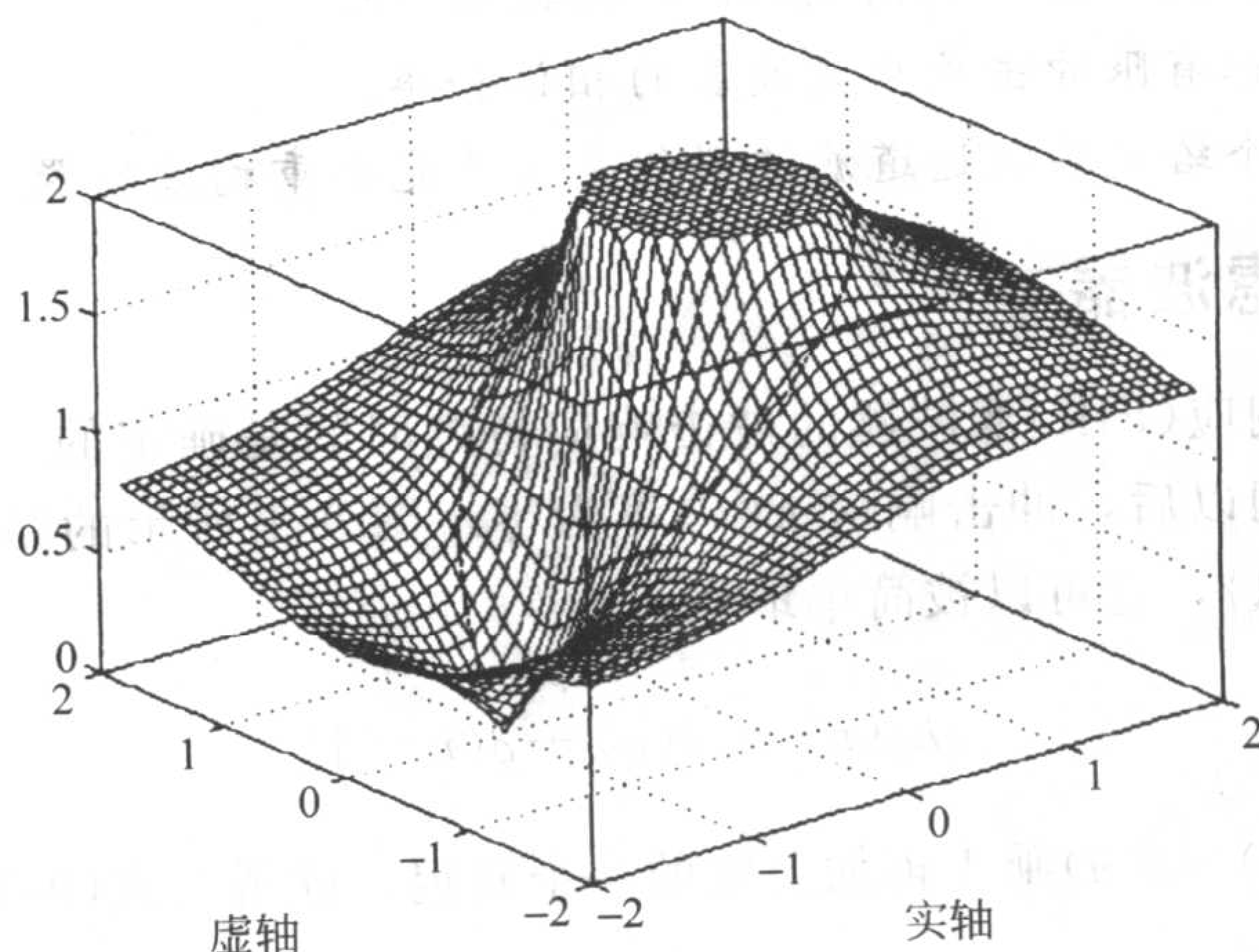


图 9-3　橡皮曲面

为了求得频率响应 $H_0(\Omega)=H_0(e^{j\Omega})$，令式(9-2)中的 $z=e^{j\Omega}$，得

171

$$H_0(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega} \tag{9-3}$$

图 9-4 所示是当 z 在单位圆周上时传递函数的幅度变化，图 9-5 是它的幅频特性与相频特性．可以看到幅频特性在低频部分($\Omega=0$ 附近)大，而在高频部分($\Omega=\pi$ 附近)小，所以它是一个低通滤波器．注意，$h(n)$关于中点 $n=1.5$ 对称，图 9-5 所示的相频特性呈线性变化．

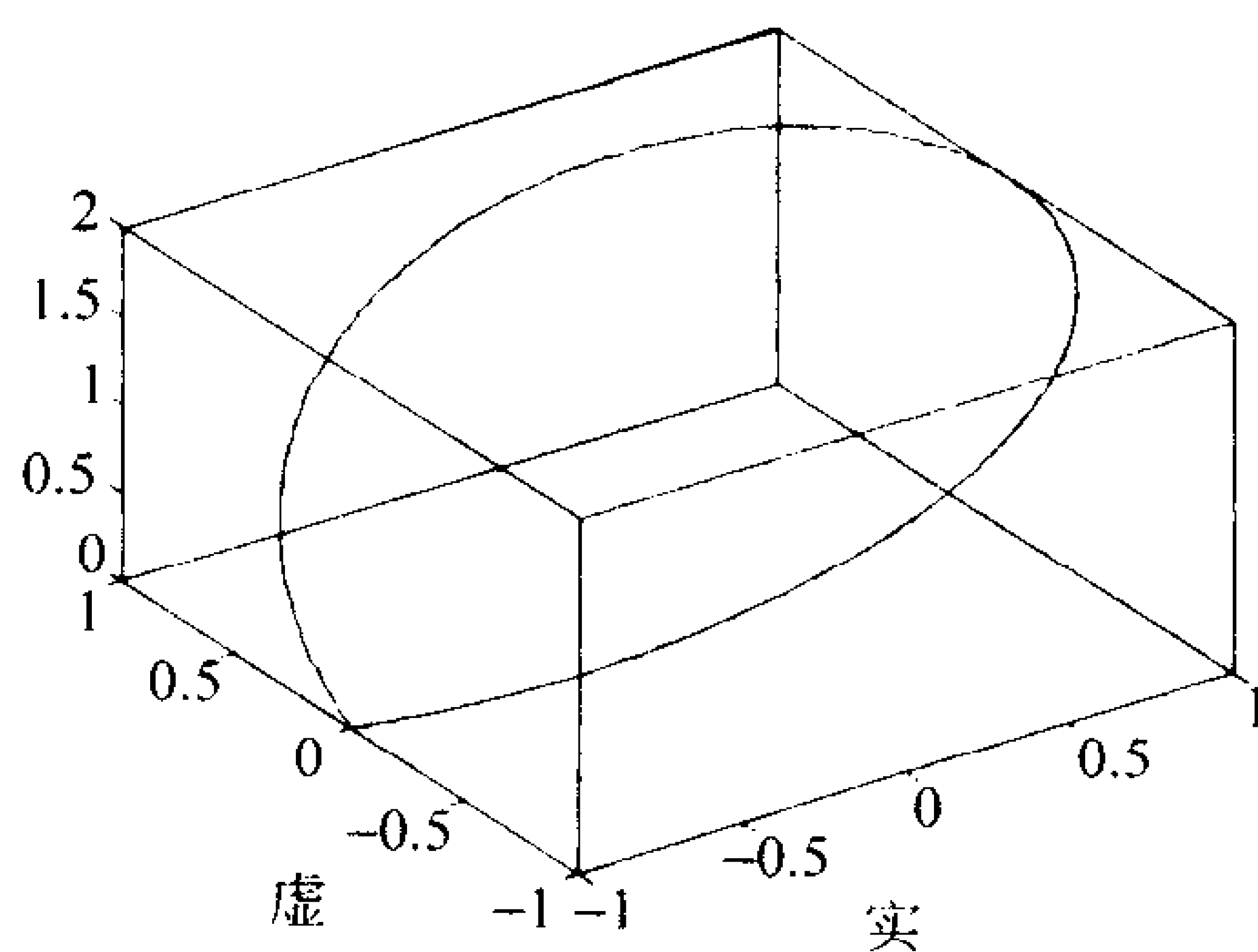


图 9-4 单位圆周上的幅度变化

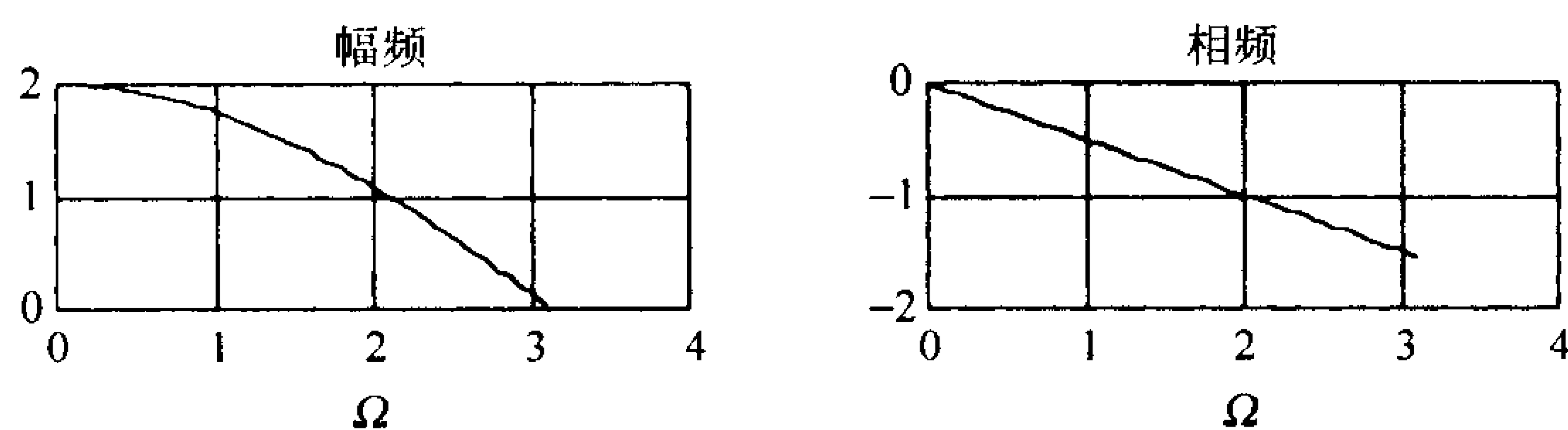


图 9-5 幅频与相频特性

考察图 9-6 所示的结构．它与图 9-1 所示的结构类似，不同之处在于该滤波器的第 2 个滤波系数为−1．下面我们将会看到该滤波器与图 9-1 所示的滤波器的频率响应互为镜像．

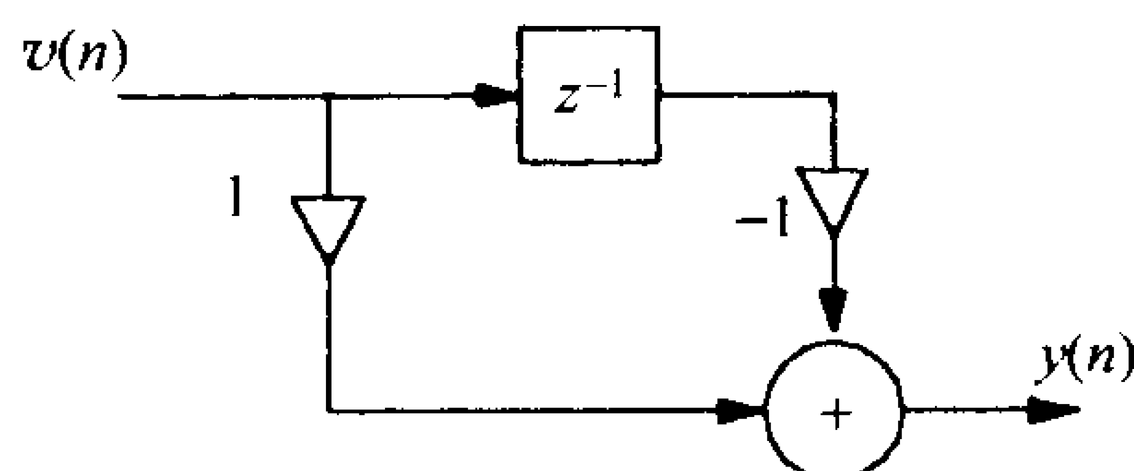


图 9-6 高通滤波器

图 9-6 所示滤波器的冲击响应为 $h_1(n)=\{1, -1\}$．作 z 变换后得滤波器的传递函数为 172

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z} \tag{9-4}$$

这是一个高通滤波器．图 9-7 是它的零-极点分布图，图 9-8 是它在 z 平面上的幅度图．其频率响应为

$$H_1(e^{j\Omega}) = H_1(\Omega) = 1 - e^{-j\Omega} \tag{9-5}$$

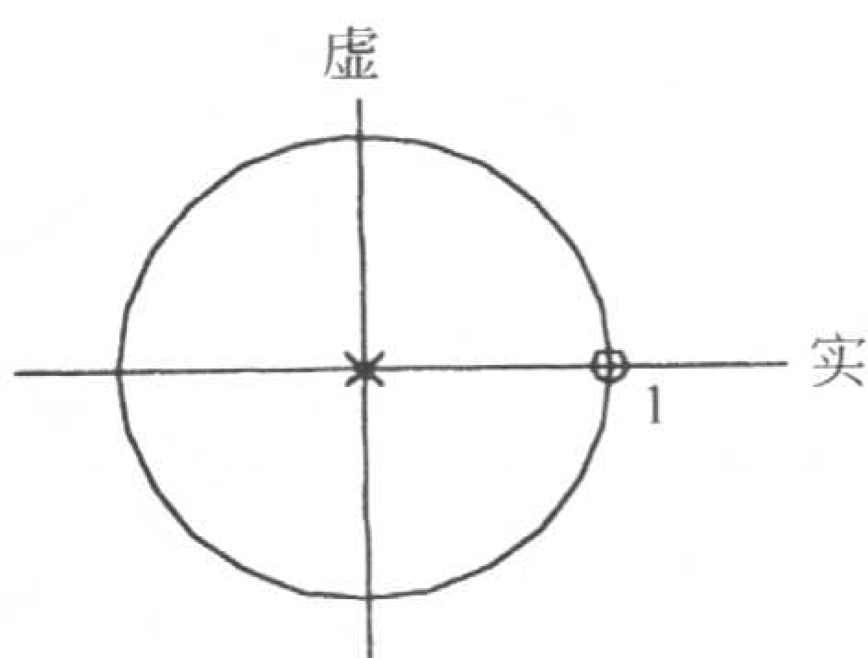


图 9-7 零-极点分布图

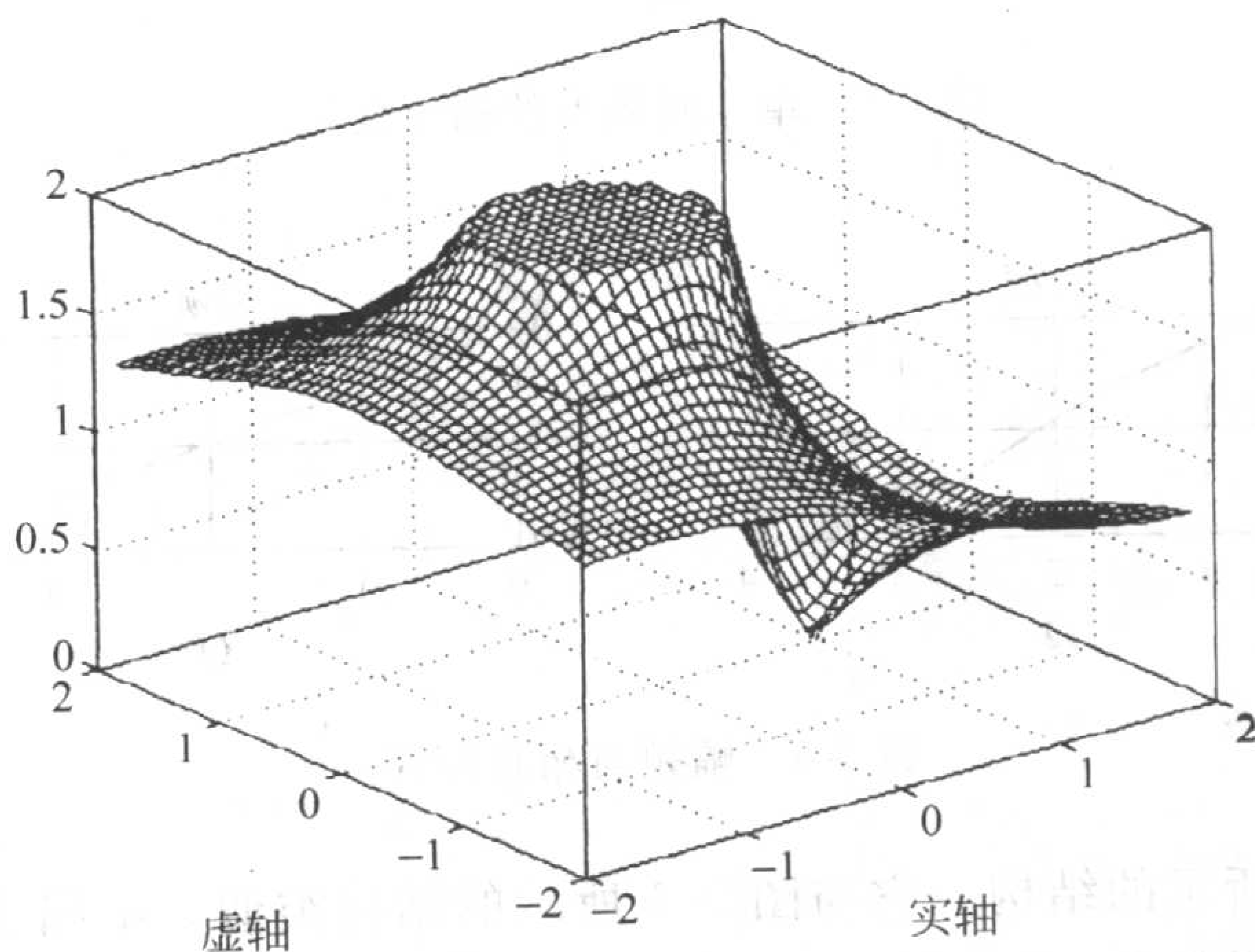


图 9-8 橡皮曲面

图 9-9 是它的幅频特性与相频特性. 可以看到幅频响应在低频部分小, 而在 $\Omega=$

173

π 的高频部分大, 因而它是一个高通滤波器.

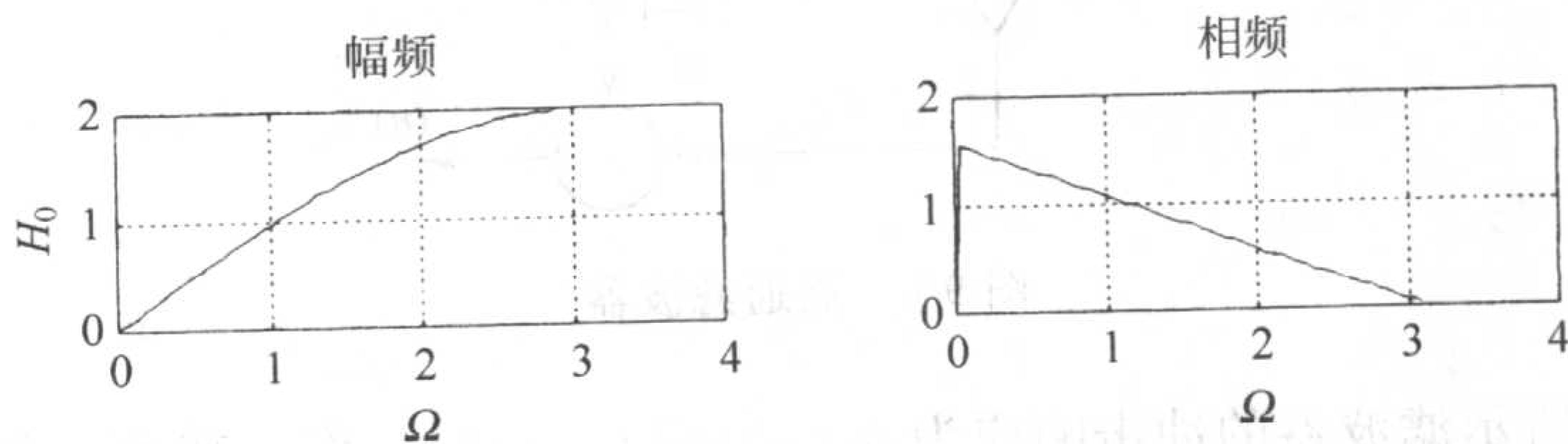


图 9-9 幅频与相频特性

比较图 9-1 和图 9-6 所示的两个滤波器的零-极点分布图、关于 z 平面的幅度图以及幅频特性与相频特性, 可以看到在某种意义上它们是互为镜像的. 镜像滤波器的概念对于研究小波是十分重要的, 因此我们将在这里略作停留, 稍微详细地介绍有关镜像滤波器的一些知识. 先介绍镜像对称概念的起源. 全通滤波器 (allpass network) 在整个频率域有相同的幅频响应, 即

$$|H(\Omega)|^2=1,\text{对所有 }\Omega \tag{9-6}$$

有理传递函数的一般形式可以用 z 的正幂次形式表示为

$$H(z)=\frac{b_M z^M+\cdots+b_1 z+b_0}{z^N+a_{N-1}z^{N-1}+\cdots+a_1 z+a_0} \tag{9-7a}$$

也可以通过将上式与 z^{-N} 相乘得到 z 的负幂次表达.

$$H(z)=\frac{b_M z^{M-N}+\cdots+b_1 z^{-N+1}+b_0 z^{-N}}{1+a_{N-1}z^{-1}+\cdots+a_1 z^{-N+1}+a_0 z^{-N}}=\frac{N(z)}{D(z)} \tag{9-7b}$$

这就是 $H(z)$的一般形式. 对于全通滤波器而言，$N(z)$与 $D(z)$存在一种特殊的关系，即

$$N(z)=z^{-N}D(z^{-1}) \tag{9-8}$$

174

这表明，首先 $N(z)$与 $D(z)$有相同的阶，其次它们的系数序列是互为逆序的. 例如，若 $D(z)$为

$$D(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+5z^{-4}$$

那么

$$D(z^{-1})=1+2z+3z^2+4z^3+5z^4$$

于是

$$N(z)=z^{-4}D(z^{-1})=5+4z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}$$

从而

$$H(z)=\frac{5+4z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+5z^{-4}}$$

下面的练习旨在帮助读者熟悉上述概念.

练习 9.1 z 变换的时间反转性是指若 $v(n)\leftrightarrow V(z)$，则 $v(-n)\leftrightarrow V(z^{-1})$. 为理解其中的含义，请对图 9-10 所示的波形作下列操作.

(a)求 $v_1(n)$的 z 变换.

(b)求 $v_2(n)$的 z 变换，注意它能够被表示为 $V_1(z^{-1})$.

(c)求 $v_3(n)$的 z 变换，注意它能够被表示为 $V_1(-z)$.

(d)画出 $V_1(-z^{-1})$对应的时间函数.

答案： (a)$V_1(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+5z^{-4}$.

(d)图 9-10 的最后一个图.

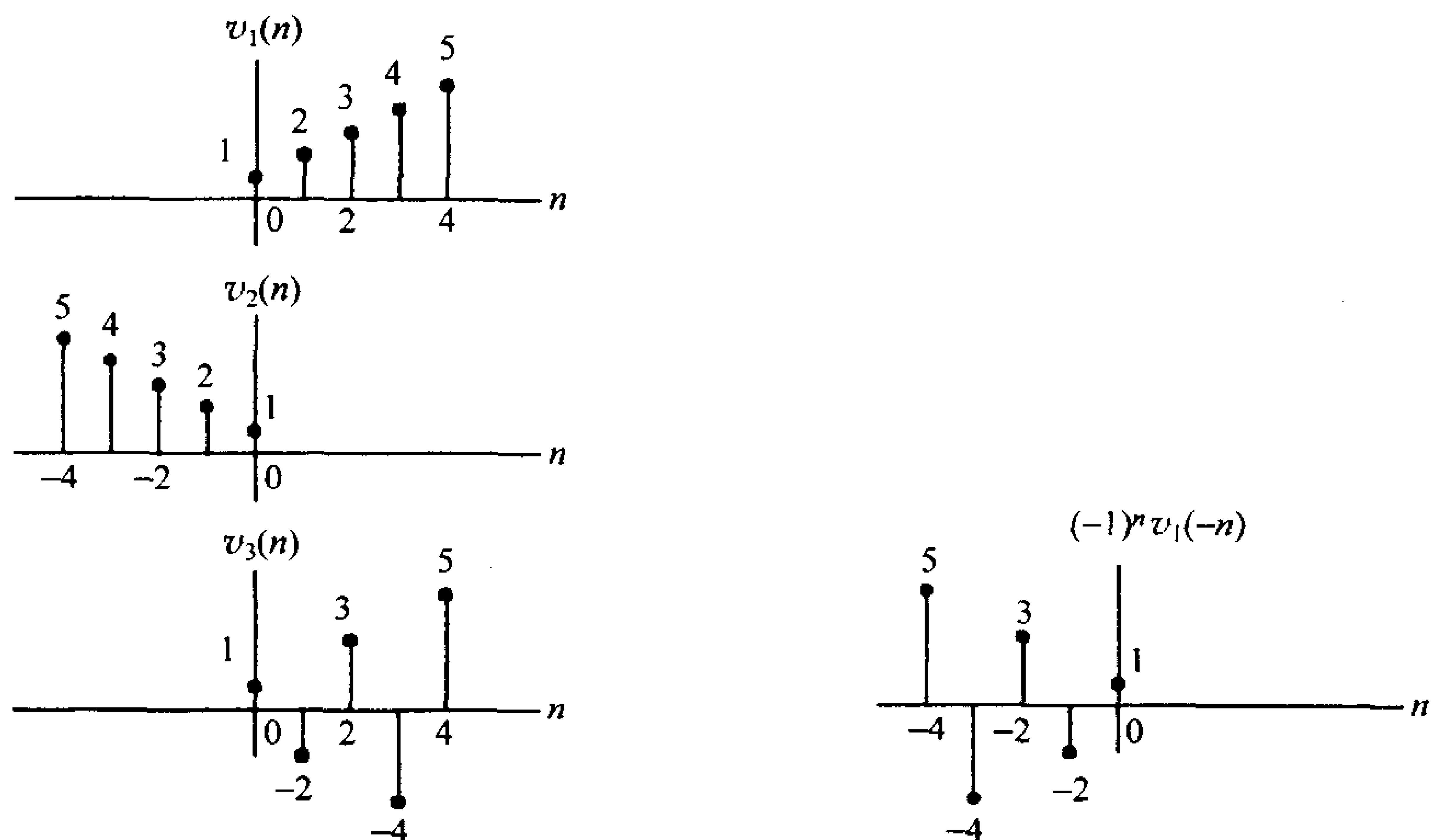


图 9-10 练习 9.1 的函数

利用练习 9.1 的结果，我们可以看到，式(9-8)中的 $D(z^{-1})$是将分母序列作时间反转，而与 z^{-N}相乘则相当于将作时间反转后的分母序列向右平移，直到它成为一个因果系统为止. 对于全通滤波器，式(9-7)可以写成如下的形式.

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_{N-1}z^{-N+1}+z^{-N}}{1+a_{N-1}z^{-1}+\cdots+a_1z^{-N+1}+a_0z^{-N}} \tag{9-9}$$

下面给出一个例子，从不同的角度对该滤波器加以说明.

例 9.1 计算并画出下面的全通滤波器的零-极点分布、关于 z 平面的幅值图(橡皮曲线)以及频率响应.

$$H(z)=\frac{4+6z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}}$$

解 用下面的 MATLAB 命令可以确定零点和极点所在的位置:

极点: `roots([1 4 6 4])`

执行该命令后得到 3 个极点: −0.5, −0.5±j0.5.

零点: `roots([4 6 4 1])`

执行该命令后得到 3 个零点: −2, −1±j1.

零-极点分布图如图 9-11 所示.

图 9-12 是该全通滤波器关于 z 平面的幅值图(橡皮曲线). 从图中可以清楚地看到 3 个零点−2, −1±j1. 为了突出滤波器的全通特性，单位圆周的极点已经被抑制了. 该图也清楚地显示单位圆是平的，说明频率响应在整个频率域内相等.

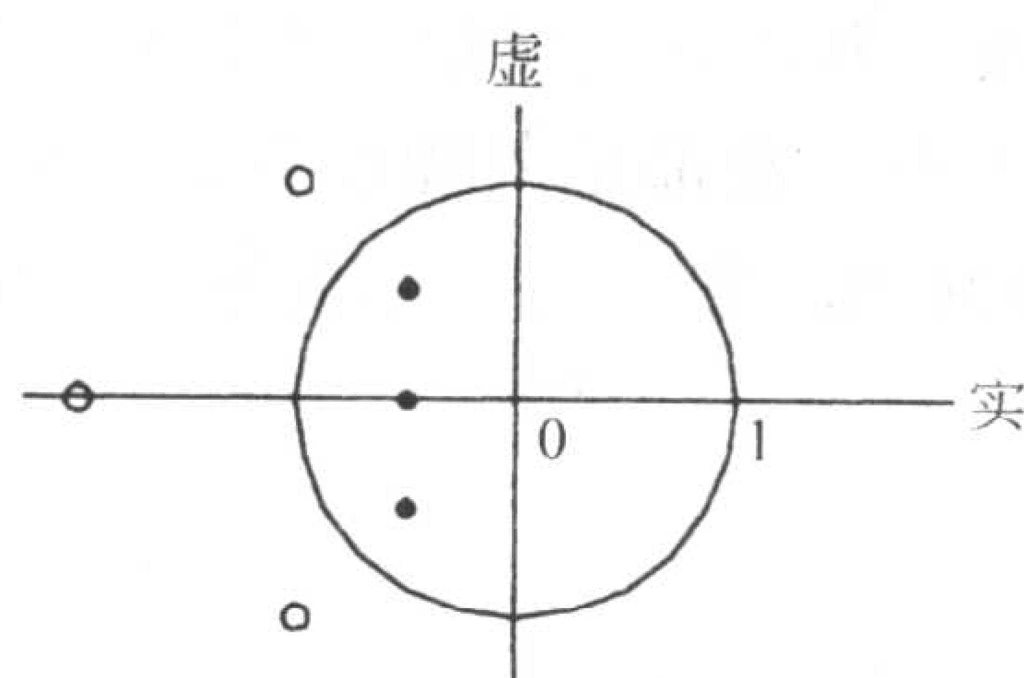


图 9-11 零-极点分布图

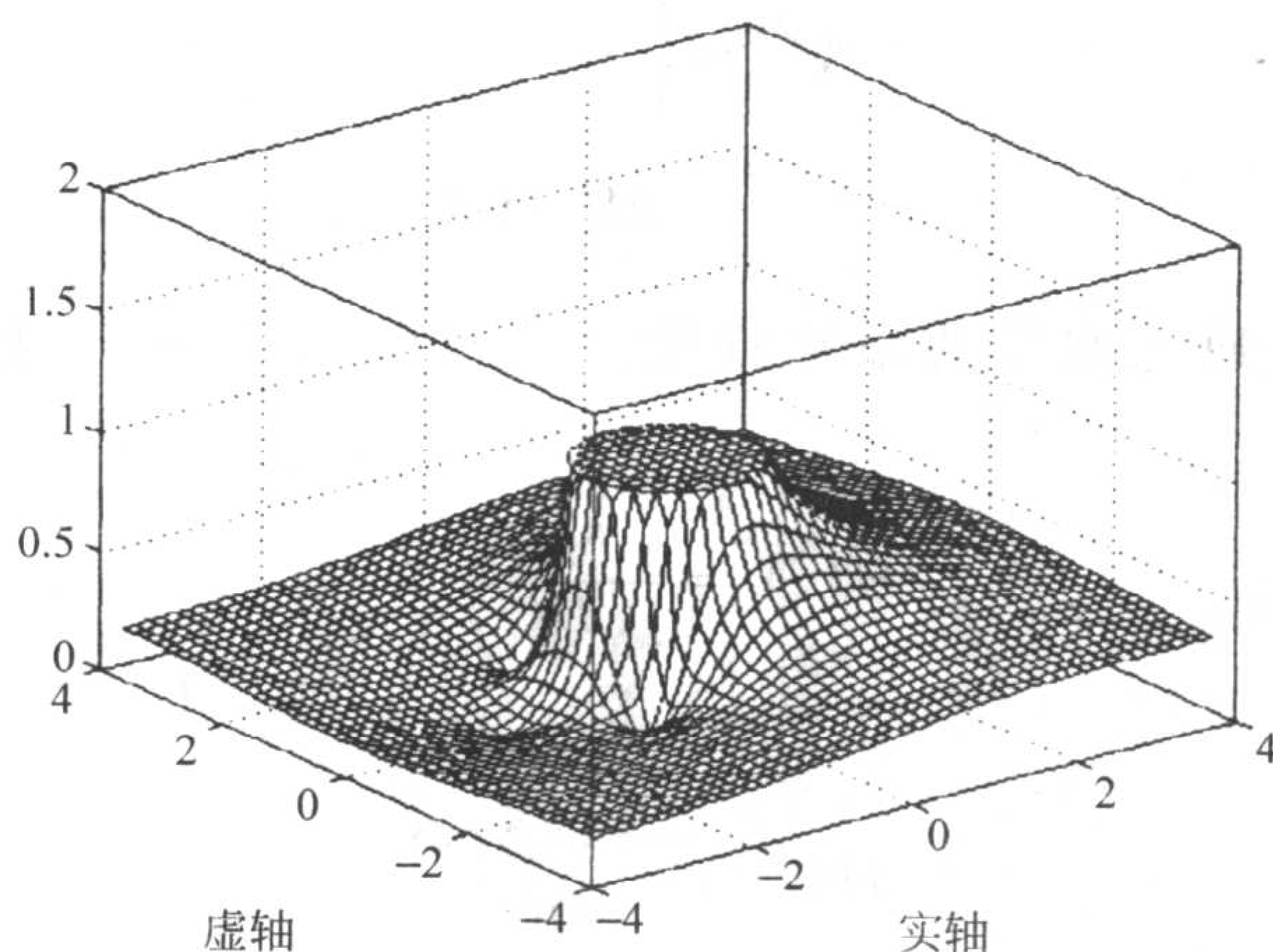


图 9-12 关于 z 平面的幅值图(橡皮曲线)

图 9-13 给出了 $-\pi<\Omega<\pi$ 范围内的频率响应．可以看到，在频率域内幅频特性恒为常数，而相频特性在 -3π 到 3π 范围内变化．(MATLAB 按模 2π 调节相角，所以图中显示的范围为 $-\pi$ 到 π.)

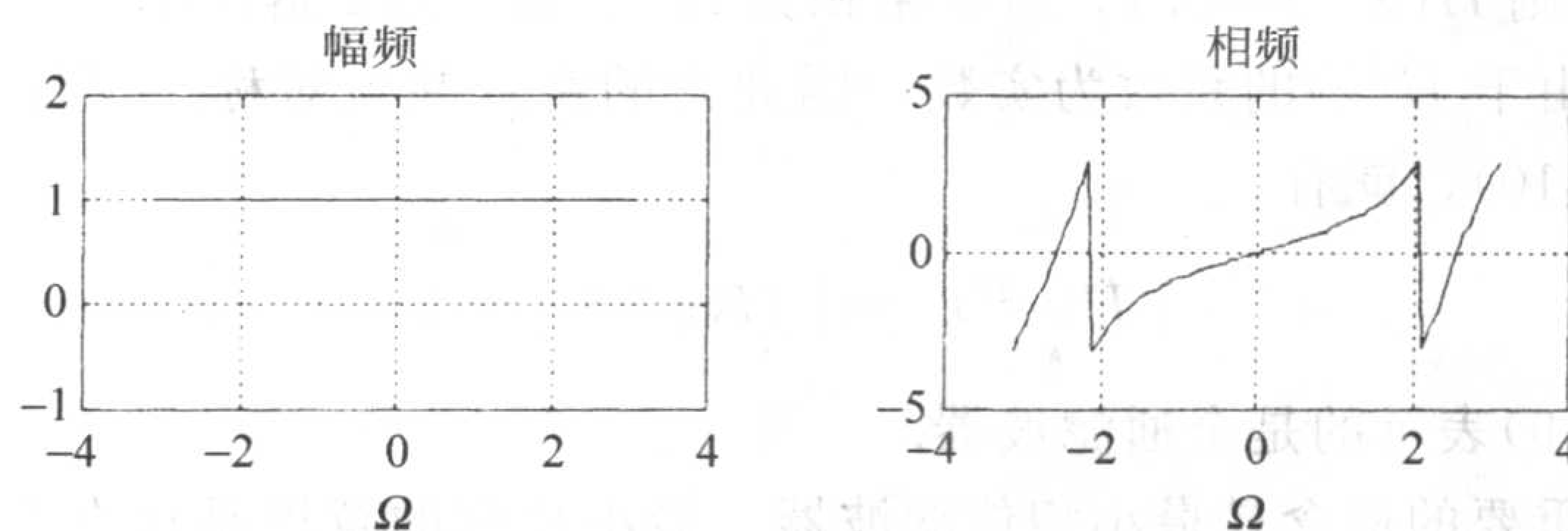


图 9-13 全通滤波器的幅频特性和相频特性

175～177

■

镜像(mirror image)一词在这里意味着若 $z_p=re^{j\theta}$ 是实系数全通传递函数的一个极点，则 $z_0=\frac{1}{r}e^{-j\theta}$ 必是它的一个零点．考虑例 9.1 中的极点 $-0.5+j0.5=(1/\sqrt{2})e^{135^\circ}$，其对应的镜像零点为 $-1-j1=\sqrt{2}e^{-j135^\circ}$．图 9-14 给出了这样的镜像

奇点．值得注意的是镜像极点和零点的角度是不同的．然而因为式(9-10)的系数为实数，所以它的极点和零点一定都是共轭出现的，因此，必有一个极点 $-0.5-\mathrm{j}0.5$ 与 $-0.5+\mathrm{j}0.5$ 形成共轭．它的镜像零点为 $-1+\mathrm{j}1$，该零点正好与 $-1-\mathrm{j}1$ 形成共轭对．

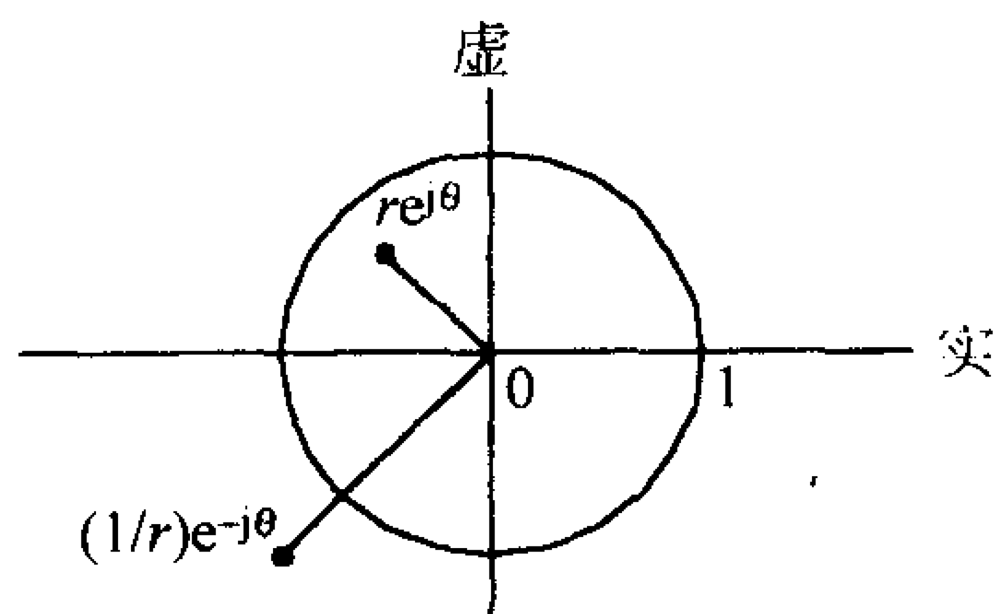


图 9-14 镜像对称性

为了说明全通滤波器的幅频特性为 $|H(e^{j\Omega})|=1$，将式(9-8)代入式(9-9)，得

$$H(z)=\frac{z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)}$$

从而

$$H(z^{-1})=\frac{z^{N}D(z)}{D(z^{-1})}$$

因此

$$H(z)H(z^{-1})=\frac{z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)}\frac{z^{N}D(z)}{D(z^{-1})}=1 \tag{9-10}$$

上式并不意味着对于所有 z 有 $|H(z)|=1$，只说明这个乘积为 1．例如，若 $H(z)=10$，则 $H(z^{-1})=0.1$，所以乘积为 1．然而，当 z 落在单位圆上时，情况就不同了．由于 $H(z)$ 的系数为实数，因此它的奇点共轭对称．记住这一事实并考虑到式(9-10)，就有

$$|H(e^{j\Omega})|=|H(e^{-j\Omega})|=1$$

178 因此，式(9-9)表示的是全通滤波器．

另一个重要的概念是最小相位滤波器．最小相位的意思是指在频率区间 $0<\Omega<\pi$ 内相位的变化最小．为了说明这一点，我们考虑一个 FIR 滤波器 $H_0(z)=4+6z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}$．它有 3 个零点 -0.5 和 $-0.5\pm\mathrm{j}0.5$，以及一个位于原点处的三阶极点．图 9-15 是该滤波器的冲击响应和零-极点分布图．

图 9-16 所示是与 $H_0(z)$ 相关的两个滤波器 $H_1(z)=1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}$ 和 $H_2(z)=1+2.5z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}$ 的零-极点分布．这 3 个滤波器具有相同的幅频响应，但是如图所示，它们的相频响应是不同的．

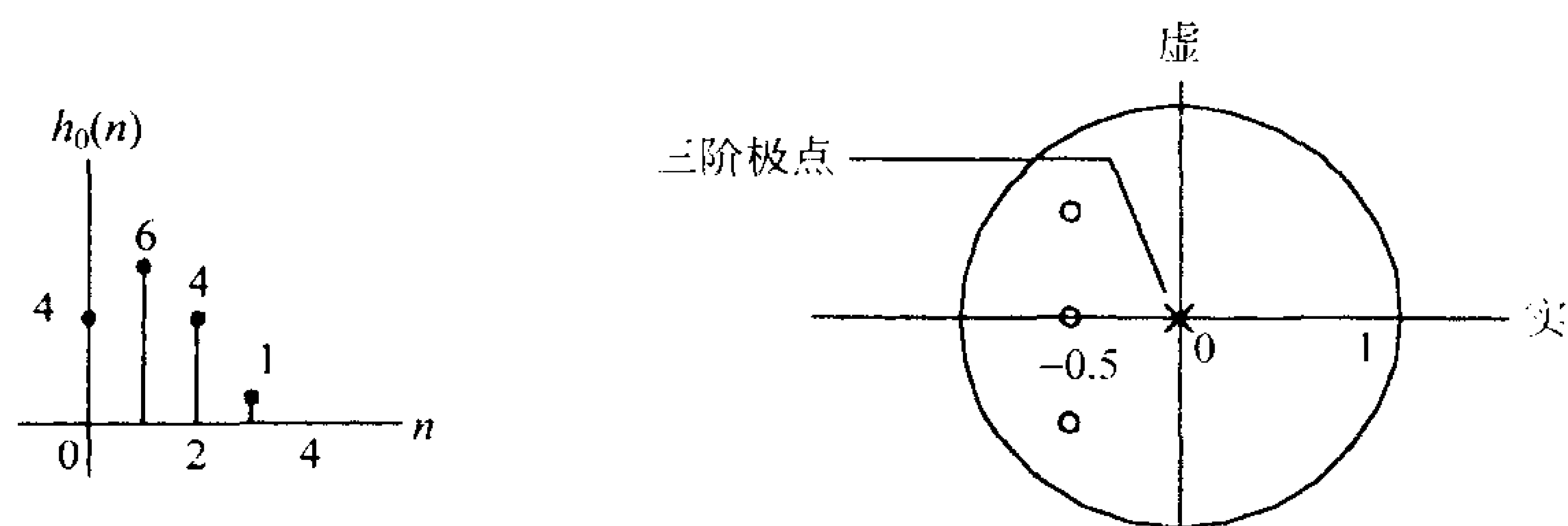


图 9-15　$H_0(z)$的冲击响应和零-极点分布

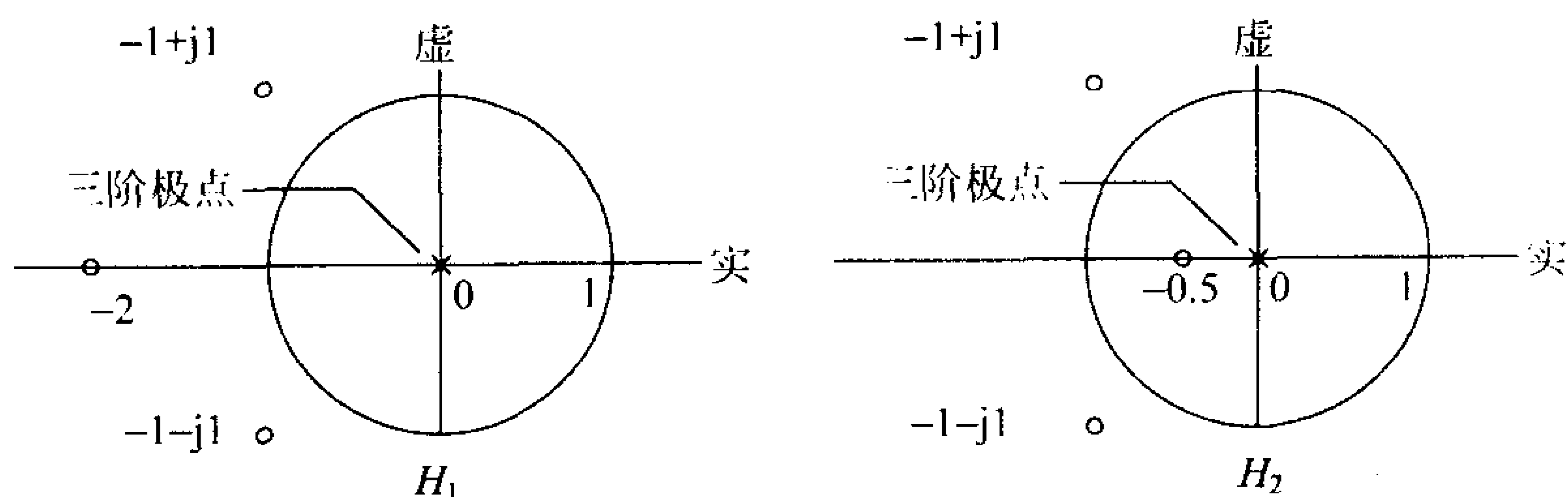


图 9-16　$H_1(z)$和 $H_2(z)$的零-极点分布

例 9.2　画出图 9-15 和图 9-16 所示的滤波器的幅频响应和相频响应. 179

解　下面的 MATLAB 程序将在几个地方被用到. 该程序用来画出由传递函数确定的滤波器的幅频特性和相频特性. 图 9-17 所示的 3 行图是重复执行该程序中的除定义滤波器之外的其他语句所得到的结果.

```
w=0:0.05:pi; %定义Ω
z=exp(j*w);  %置z = exp(jΩ)
num=4 + 6*z.^-1 + 4*z.^-2 + z.^-3; % 定义滤波器 H0
den=1;
h=num./den; %  H0 的频率响应
m=abs(h);
a=angle(h);
subplot(421) %绘制幅频
plot(w,m,'k');
title('Magnitude')
ylabel('H0')
xlabel('\Omega')
grid on
subplot(422)
plot(w,a,'k') % 绘制相频
title('Phase')
xlabel('\Omega')
grid on
```

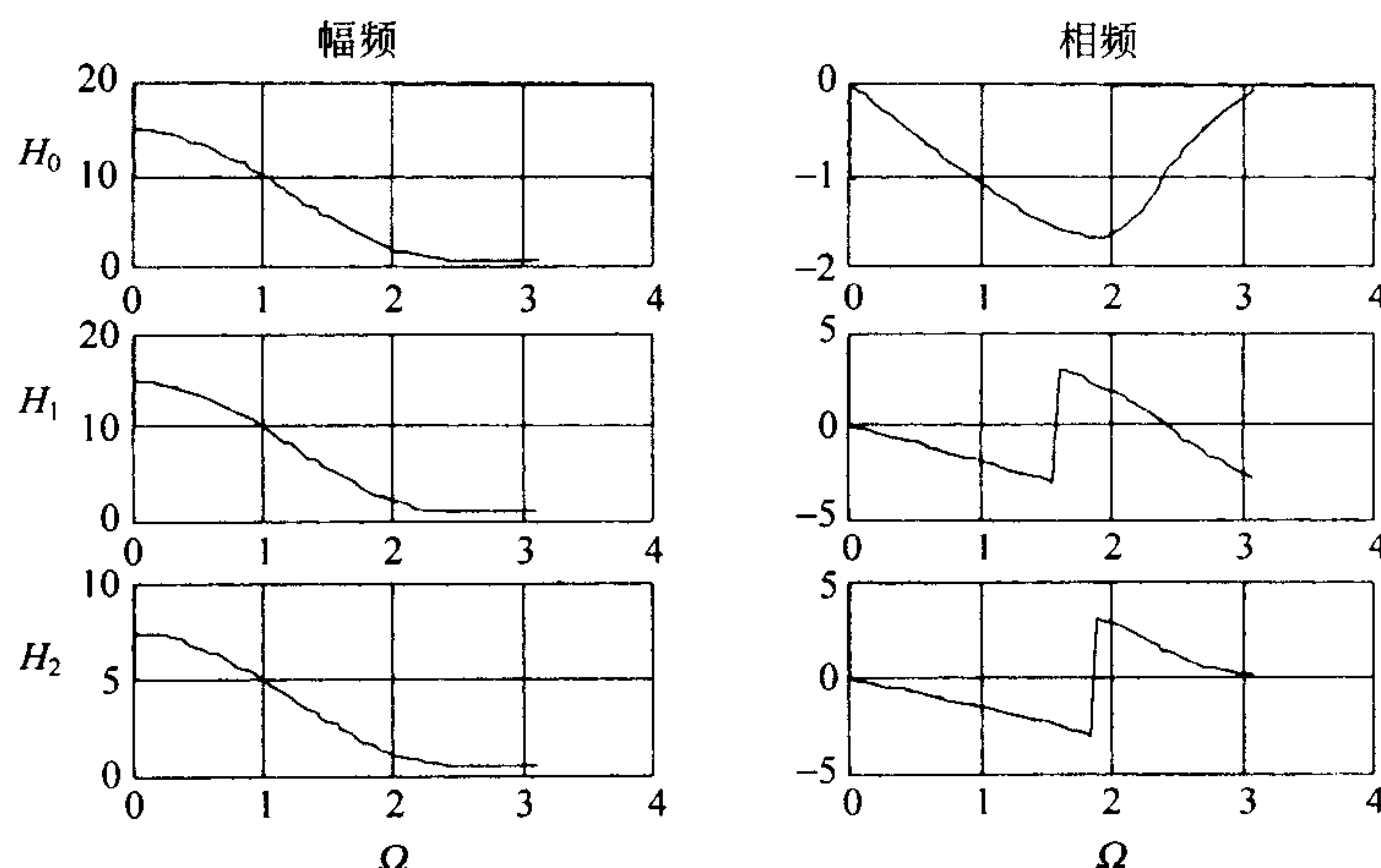


图 9-17 $H_0(z)$，$H_1(z)$和 $H_2(z)$的幅频特性和相频特性

值得注意的是3个滤波器具有相同的幅频响应，而它们的相频响应却完全不同. H_0 的相角变化范围是从0到大约−1.7弧度，H_1 的相角变化范围是从0到-3π，而 H_2 的相角变化范围是从0到-2π. 这三个函数表示了对应于相同幅频响应的最小相位变化、最大相位变化和中间相位变化. 值得注意的是 H_0 的所有零点均在单位圆内，H_1 的所有零点都在单位圆外，而 H_2 的有些零点在单位圆内，有些在单位圆外.

最小相位滤波器的所有零点都处在 z 平面上的单位圆内. 最大相位滤波器的所有零点都处在 z 平面上的单位圆外. 而如果一个滤波器的有些零点在单位圆内，有些零点在单位圆外，则这个滤波器既不是最小相位的也不是最大相位的.

还要指出的是最小、最大相位滤波器的零点是互为镜像的. $-0.5+j0.5$ 的镜像点是$-1-j1$，$-0.5-j0.5$ 的镜像点是$-1+j1$，而-0.5 的镜像点是-2. (请看图 9-15 和图 9-16.) ■

练习 9.2 求与图 9-15 中的 $H_0(n)$具有相同的幅频响应，但零-极点分布不同的滤波器的冲击响应.

答案：$h(n)=\{1, 3, 2.5, 1\}$.

9.2 正交镜像滤波器

下面，我们从一个正交镜像滤波器(QMF)的例子开始本节的讨论.

设有滤波器

$$H_0(z)=1+z^{-1} \text{ 和 } H_1(z)=1-z^{-1}$$

组成一个 QMF 对. 现在的问题是要弄清楚这样组成的滤波器组究竟有什么含义. 假设 $H_0(z)$是 N 阶的 FIR 滤波器, 那么

$$H_1(z)=H_0(-z)$$

180 ~ 181

被称为 $H_0(z)$的正交镜像滤波器(quadrature mirror filter), 而

$$H_2(z)=z^{-N}H_0(-z^{-1})$$

被称为 $H_0(z)$的共轭正交滤波器(conjugate quadrature filter).

例 9.3 求 $H_0(z)=4+6z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}$的 QMF $H_1(z)$和共轭 QMF $H_2(z)$. 画出它们在 Argand 图(即"复平面")上的零-极点分布和每个滤波器的幅频响应和相频响应.

解 正交镜像滤波器为

$$H_1(z)=H_0(-z)=4-6z^{-1}+4z^{-2}-z^{-3}\leftrightarrow\{4\quad -6\quad 4\quad -1\}$$

共轭 QMF 为

$$\begin{aligned}H_2(z)&=z^{-3}H_0(-z^{-1})=z^{-3}[4-6z+4z^2-z^3]\\&=-1+4z^{-1}-6z^{-2}+4z^{-3}\leftrightarrow\{-1\quad 4\quad -6\quad 4\}\end{aligned}$$

用 MATLAB 求得的零点和极点为

$$H_0:\text{roots}([4\quad 6\quad 4\quad 1])=-0.5,(-0.5\pm \text{j}0.5)$$

$$H_1:\text{roots}([4\quad -6\quad 4\quad -1])=-0.5,(-0.5\pm \text{j}0.5)$$

$$H_2:\text{roots}([-1\quad 4\quad -6\quad 4])=2,(1\pm \text{j}1)$$

图 9-18 给出了它们的零-极点分布. 每个图都有一个位于原点处的三阶极点. 注意, $H_0(z)$和 $H_1(z)$的零点和极点是关于原点对称的. 还要注意的是 $H_1(z)$和 $H_2(z)$的极点和零点是镜像奇点.

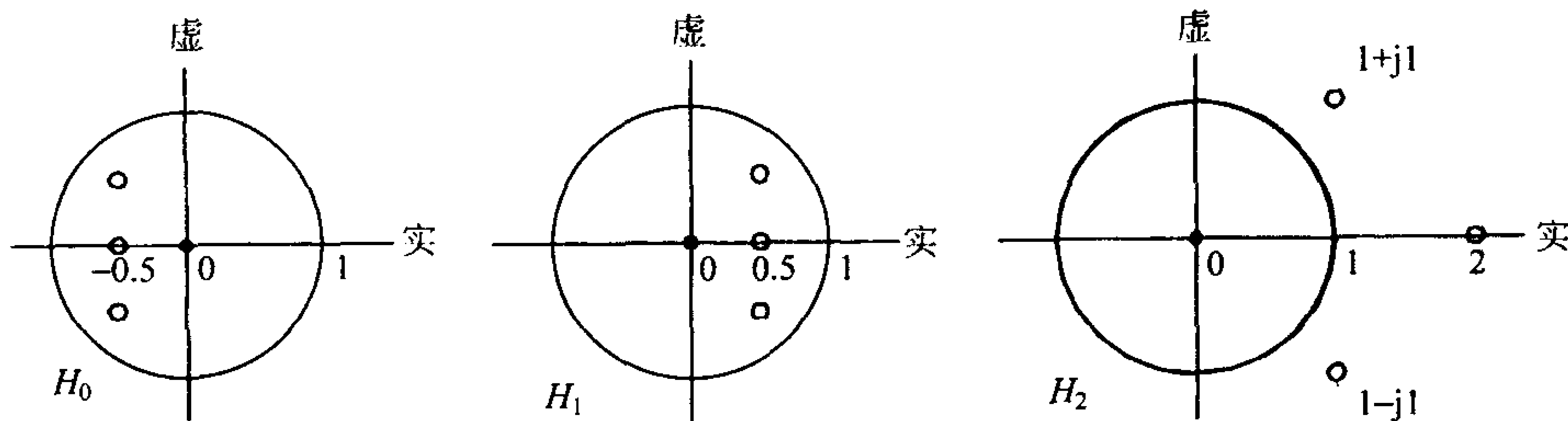


图 9-18 $H_0(z)$, $H_1(z)$和 $H_2(z)$的零一极点分布

用上面的 MATLAB 程序画出的各滤波器的幅频特性和相频特性如图 9-19 所示. 注意, $H_0(z)$和 $H_1(z)$的幅频特性和相频特性均关于频率 $\pi/2$ 镜像对称, 因此命名为正交镜像滤波器. $H_0(z)$和 $H_2(z)$的幅频特性是正交对称的, 但是相频

特性不对称．若 H_0 是最小相位的，那么 H_1 也是最小相位的，而 H_2 则是最大相位的．

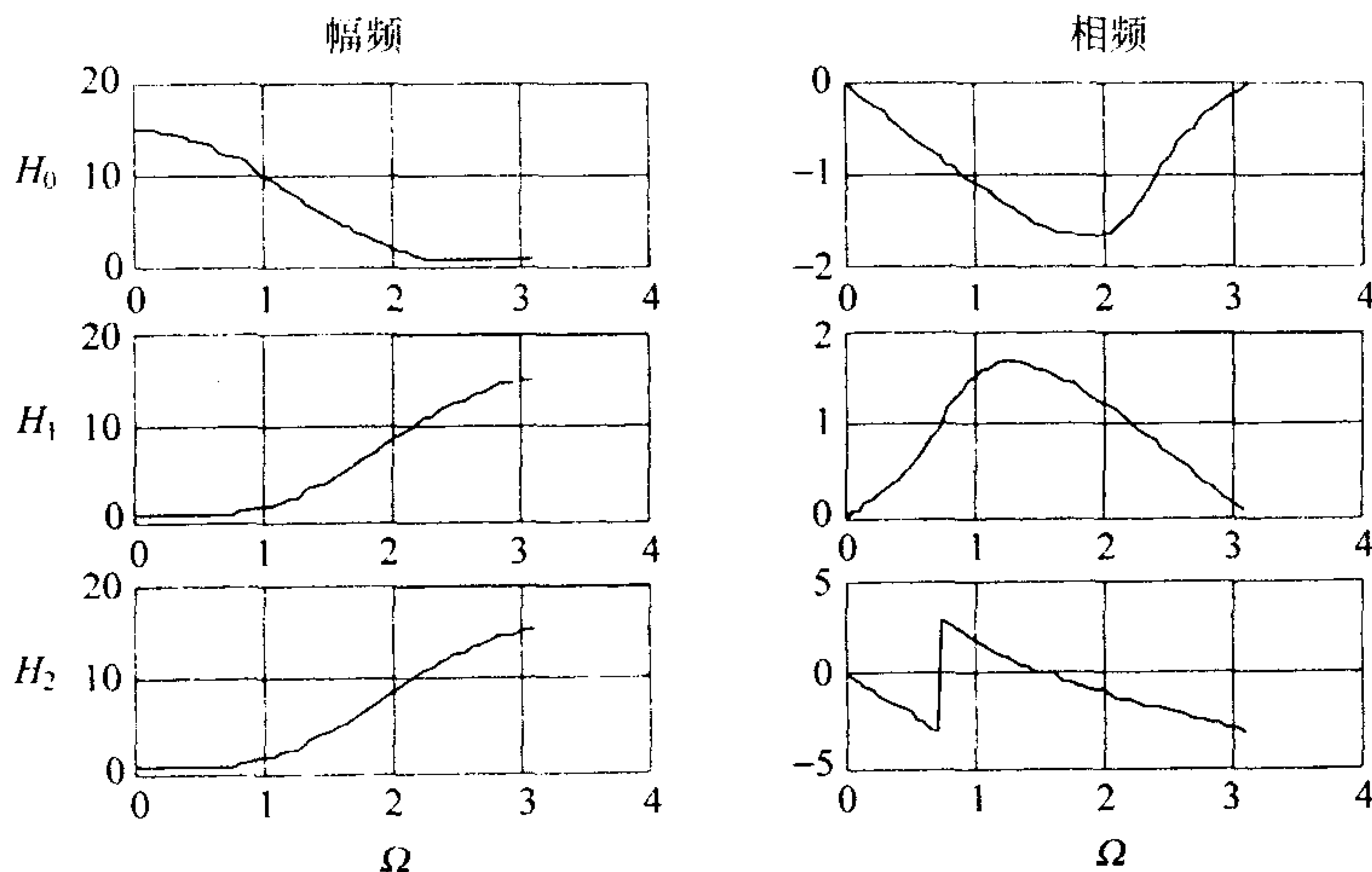


图 9-19 $H_0(z)$，$H_1(z)$和 $H_2(z)$的幅频特性和相频特性 ■

例 9.4 设 $H(z)=3+6z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}$，求与 $H(z)$具有相同幅频响应的最小相位滤波器．

解 用 MATLAB 求 $H(z)$的根，得

roots([3 6 2 −1])=−1.2638，−1，0.2638

182～183

最小相位滤波器的所有零点必须在单位圆内(或单位圆上)．−1.2638 的镜像零点为−1/1.2638=−0.7913．因此，与 $H(z)$具有相同幅频响应的最小相位滤波器 $H_0(z)$的零点必须为−0.7913，−1，0.2638．即 $H_0(z)$为

$$H_0(z)=(1+0.7913z^{-1})(1+z^{-1})(1-0.2638z^{-1})$$

$$=1+1.5275z^{-1}+0.3188z^{-2}-0.2087z^{-3}$$

用 MATLAB 验算，求得 roots([1 1.5275 0.3188 −0.2087])=−1，−0.7913，0.2638，这与题目的要求一致． ■

线性相位

另一个有用的概念是线性相位．所谓线性是指所说事物——在这里就是相位——是一条直线．也就是在表达式 $H(\Omega)=A(\Omega)e^{j\theta(\Omega)}$ 中，相位 $\theta(\Omega)$具有 $\theta(\Omega)=m\Omega$ 的形式，其中的 m 表示相位的斜率．

图 9-20 所示是 4 个滤波器的冲击响应，图 9-21 是它们对应的频率响应．值得注意的是前 3 个滤波器的冲击响应关于它们的中心点对称，其相位为线性的．而第 4 个滤波器的冲击响应是非对称的，相位也不具有线性特性．出现这种情况并非偶然，事实上，线性相位的充分必要条件是滤波器的冲击响应关于它们的中心点对称．（因为可实现的 IIR 滤波器没有中心点，所以它们不可能具有线性相位．）DTFT 的性质表明一个对称的 FIR 滤波器具有线性相位．一个关于时间的偶函数（比如 h_0）具有实变换，这意味着它的相位为零．也就是说，相位为水平直线．因此，将一个偶的冲击响应向右平移到使之可实现（比如 h_2），等价于将传递函数乘以指数 $e^{-j\theta}$（时间平移性质），这将改变相位的斜率，但仍是线性的．

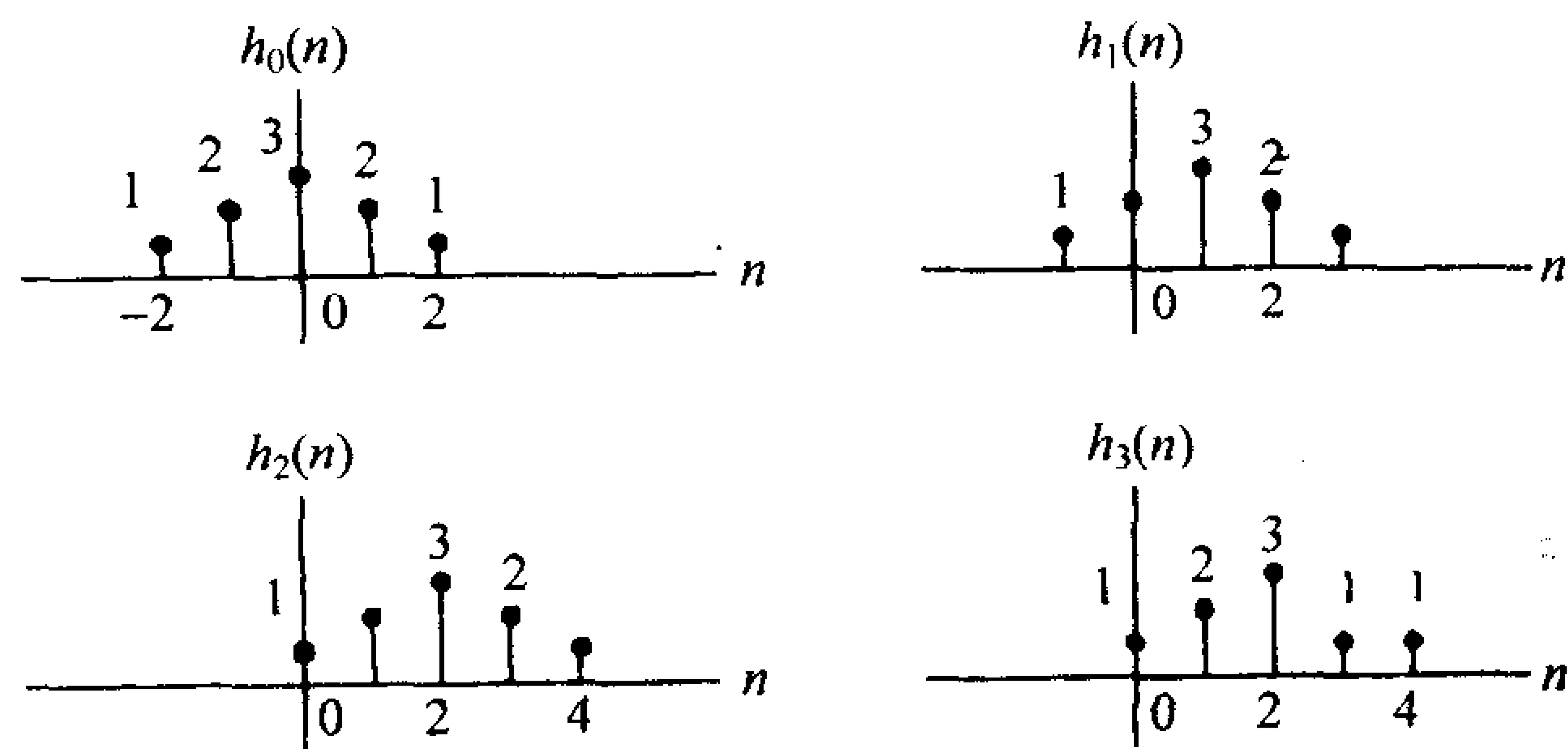


图 9-20　4 个滤波器的冲击响应

184

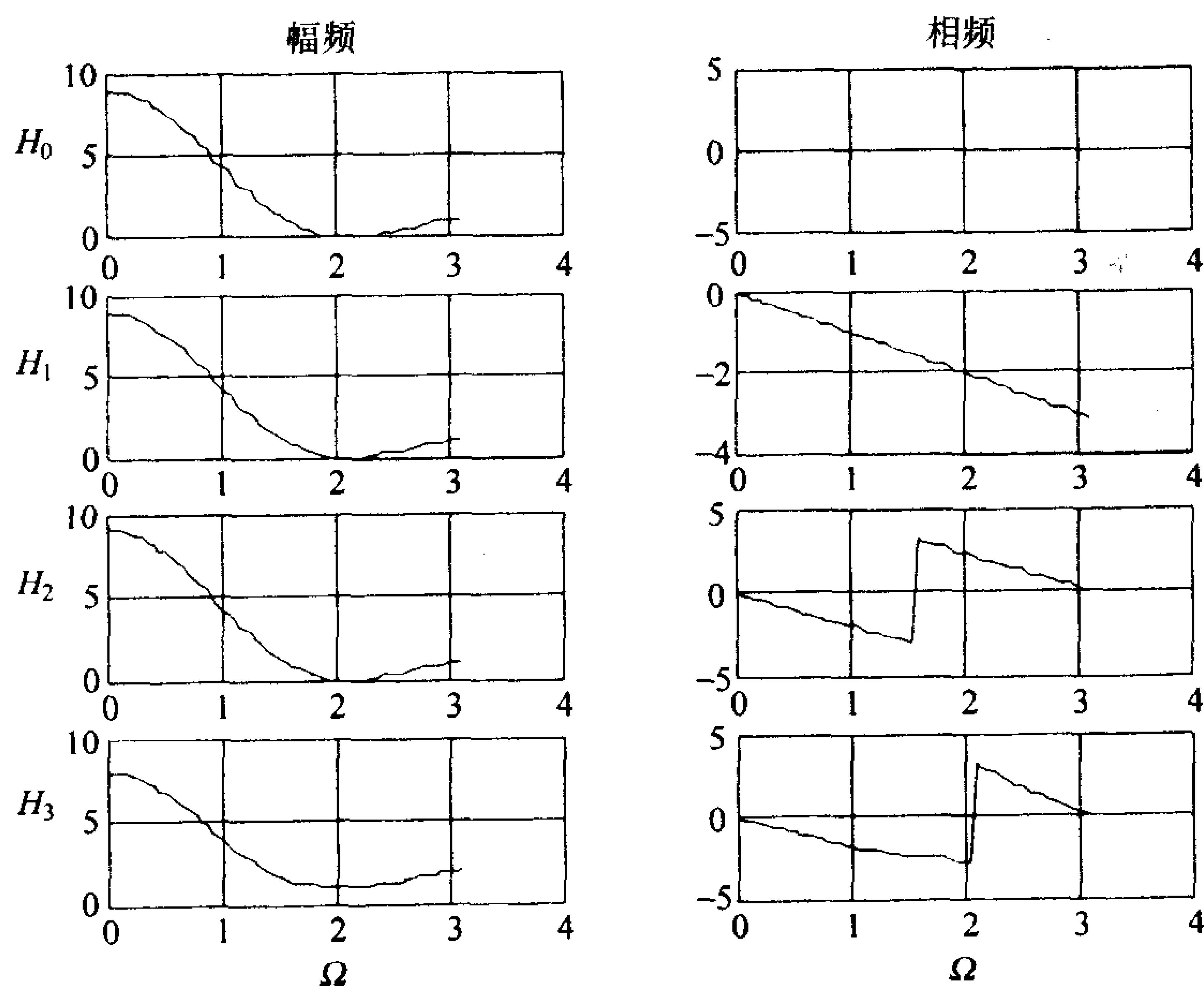
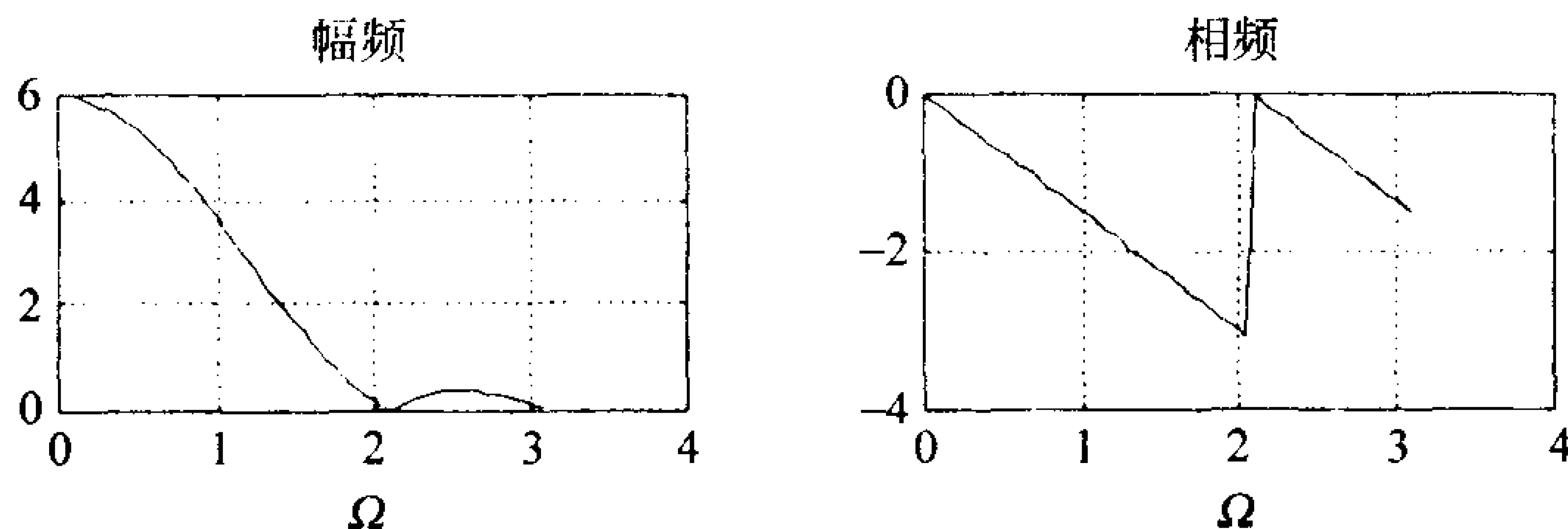


图 9-21　H_0，H_1 和 H_2 具有线性相位，H_3 为非线性相位

练习 9.3 画出对称滤波器 $h(n)=\{1\quad 2\quad 2\quad 1\}$的幅频响应和相频响应. 其相位斜率为多少?

答案: 图 9-22. 斜率为-1.5Ω.



185

图 9-22 练习 9.3 答案

9.3 滤波器组

全通滤波器和线性相位滤波器似乎是互不相容的. 因为全通滤波器 $H(z)$的分子和分母必须同为 N 阶，所以它一定具有无限冲击响应. 另一方面，因为一个可实现的 IIR 滤波器不可能关于它的中点对称，所以线性相位滤波器必须是 FIR 滤波器. 一方面要求 IIR，另一方面又要求 FIR，彼此互不相容. 然而，用一组串联和并联排列的滤波器组却可以实现全通和线性相位. 当两个条件同时满足时，这样的滤波器组被称为是完全重构滤波器组(perfect reconstruction filter bank).

一个滤波器组是一个由若干滤波器组成的集合，它们通过采样和延迟运算连接起来. 图 9-23 所示是小波所使用的特殊滤波器组. 它的一个分支(上分支)由两个低通滤波器组成，而另一个分支(下分支)由两个高通滤波器组成. 这种高通、低通滤波器的组合是使得信号的所有分量都能够通过的唯一一种组合. $(\downarrow 2)$表示按 2 进行下采样运算，$(\uparrow 2)$表示按 2 进行上采样运算. $(\downarrow 2)(\uparrow 2)$的组合是将信号的奇数分量置零. 下面以一个例子来说明.

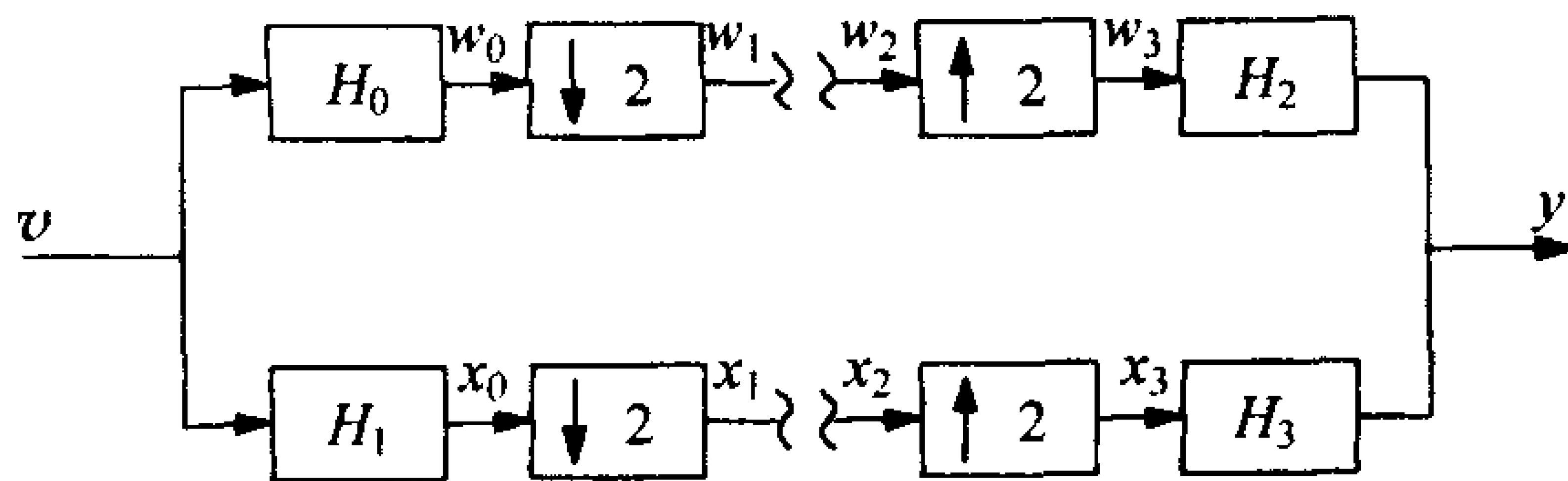


图 9-23 双通道滤波器组

我们集中考虑(↓2)(↑2)运算．将图 9-24a 所示的信号 $v(n)$ 作(↓2)运算，经下采样以后的信号在图中用(↓2)$v(n)$标记．信号经压缩后丢掉了奇数信号分量，所得信号的长度是 $v(n)$ 的一半．再经过(↑2)运算后的信号在图中用(↑2)(↓2)$v(n)$加以标记．

因此，重叠运算(↓2)(↑2)保留了信号中的偶数分量，而去掉了信号中的奇数分量．图 9-24b 是用另一种方法得到的相同结果，它可以帮助我们理解为什么变换(↑2)(↓2)$v(n)$可以表示为 186

$$(\uparrow 2)(\downarrow 2)v(n) \leftrightarrow \frac{1}{2}[V(z)+V(-z)] \tag{9-11}$$

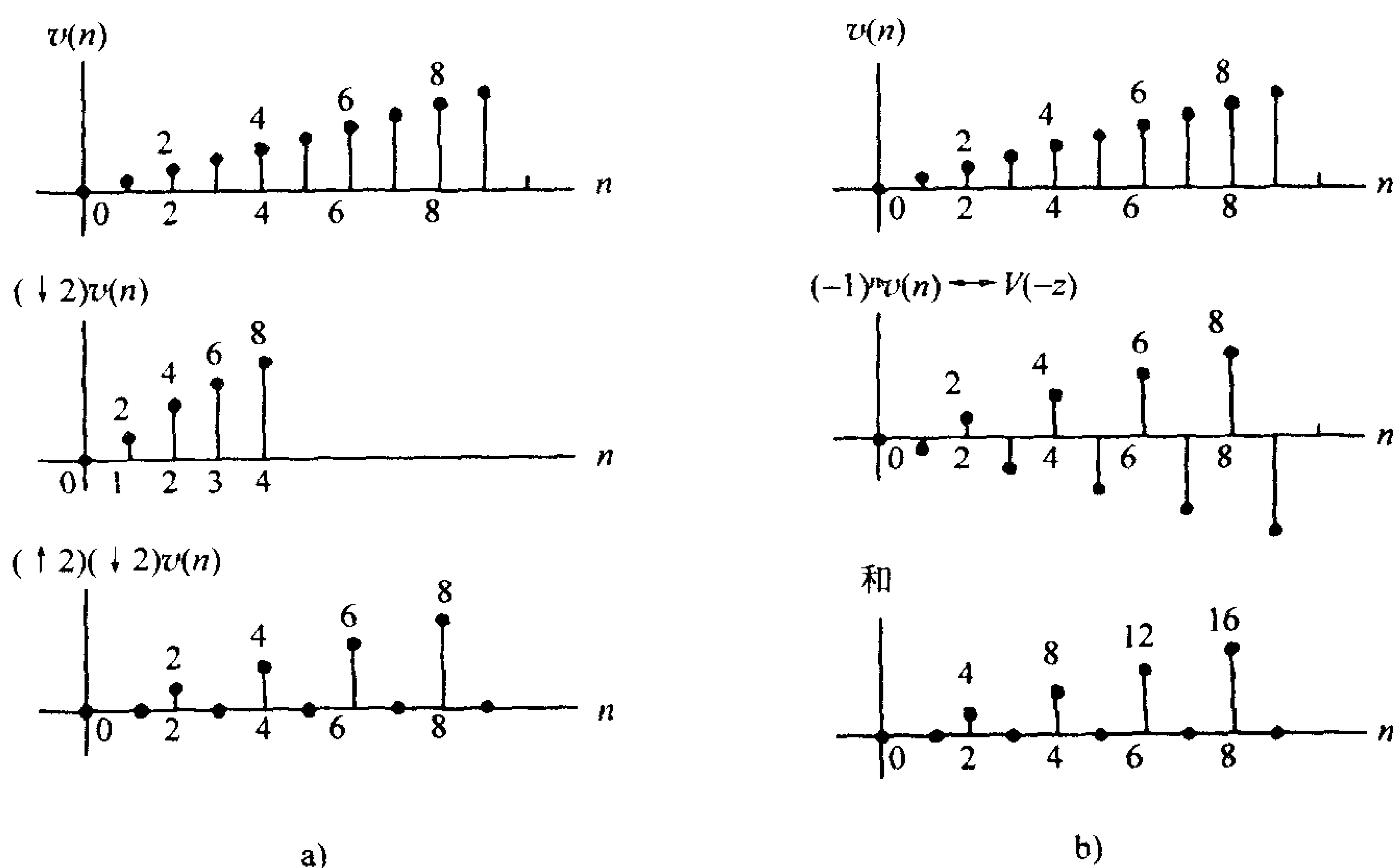


图 9-24 用两种方法实现(↑2)(↓2)$v(n)$运算得到相同的结果

图 9-24b 中信号的变换为

$$v(n) \leftrightarrow V(z)$$

$$(-1)^n v(n) \leftrightarrow V(-z) \quad (\text{见练习 } 9.1)$$

$$\text{和} \leftrightarrow V(z)+V(-z)$$

因为和是(↑2)(↓2)$v(n)$的两倍，所以由变换的线性特性得到方程(9-11)．

图 9-23 由两个分支组成．上分支执行运算 H_0(↓2)(↑2)H_2，下分支执行运算 H_1(↓2)(↑2)H_3．对于上分支，记

$$W_0(z) = H_0(z)V(z)$$

执行(↓2)(↑2)运算得到 $w_3(n)$，根据方程(9-11)得到变换如下： 187

$$W_3(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)V(z) + H_0(-z)V(-z)]$$

同理，信号 $x_3(n)$的变换为

$$X_3(z) = \frac{1}{2}[H_1(z)V(z) + H_1(-z)V(-z)]$$

信号 W_3 和 X_3 分别通过滤波器 H_2 和 H_3，得到输出 Y.

$$\begin{aligned} Y(z) &= W_3(z)H_2(z) + X_3(z)H_3(z) \\ &= \frac{1}{2}[H_0(z)H_2(z)V(z) + H_0(-z)H_2(z)V(-z)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[H_1(z)H_3(z)V(z) + H_1(-z)H_3(z)V(-z)] \end{aligned}$$

经整理，得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2}[H_0(z)H_2(z) + H_1(z)H_3(z)]V(z) \\ &\quad + \frac{1}{2}[H_0(-z)H_2(z) + H_1(-z)H_3(z)]V(-z) \\ &= \frac{1}{2}F_0(z)V(z) + \frac{1}{2}F_1(z)V(-z) \end{aligned}$$

对于具有 ℓ 时间延迟的完全重构，$Y(z)$必须等于 $z^{-\ell}V(z)$. 若不进行($\downarrow$2)($\uparrow$2)运算，则滤波器组的传递函数为

$$F_0(z) = H_0(z)H_2(z) + H_1(z)H_3(z) \tag{9-12}$$

上式被称为变形项(distortion term). 混叠项(alias term)

$$F_1(z) = H_0(-z)H_2(z) + H_1(-z)H_3(z) \tag{9-13}$$

是由混叠导致的. 对于完全重构滤波器组，变形项应该为纯时间延迟，而混叠项应该为零.

$$F_0(z) = H_0(z)H_2(z) + H_1(z)H_3(z) = 2z^{-\ell} \tag{9-14}$$

188

$$F_1(z) = H_0(-z)H_2(z) + H_1(-z)H_3(z) = 0 \tag{9-15}$$

式(9-14)和式(9-15)给出了 4 个滤波器之间的两个关系，这使得我们可以自由地选择两个滤波器. 一个方案是定义

$$H_2(z) = H_1(-z) \quad \text{和} \quad H_3(z) = -H_0(-z) \tag{9-16}$$

这可以保证混叠项为零.

现在，让我们重新考虑变形项.

$$H_0(z)H_2(z)+H_1(z)H_3(z)$$

其左边项是图 9-23 的上分支，右边项是下分支(当不进行两个采样运算时). 现在我们给出一个可以使变形项简化的定义. 记

$$P_0(z)=H_0(z)H_2(z) \qquad P_1(z)=H_1(z)H_3(z) \tag{9-17}$$

P_0 是上分支乘积或低通滤波器，P_1 是下分支乘积或高通滤波器. 图 9-25 演示了这一替换过程. 将式(9-16)代入式(9-17)，有

$$P_0(z)=H_0(z)H_1(-z) \qquad P_1(z)=-H_0(-z)H_1(z)$$

从而

$$-P_0(-z)=-H_0(-z)H_1(z)=P_1(z)$$

因此，变形项可以简化为

$$H_0(z)H_2(z)+H_1(z)H_3(z)=P_0(z)-P_0(-z)=2z^{-\ell} \tag{9-18}$$

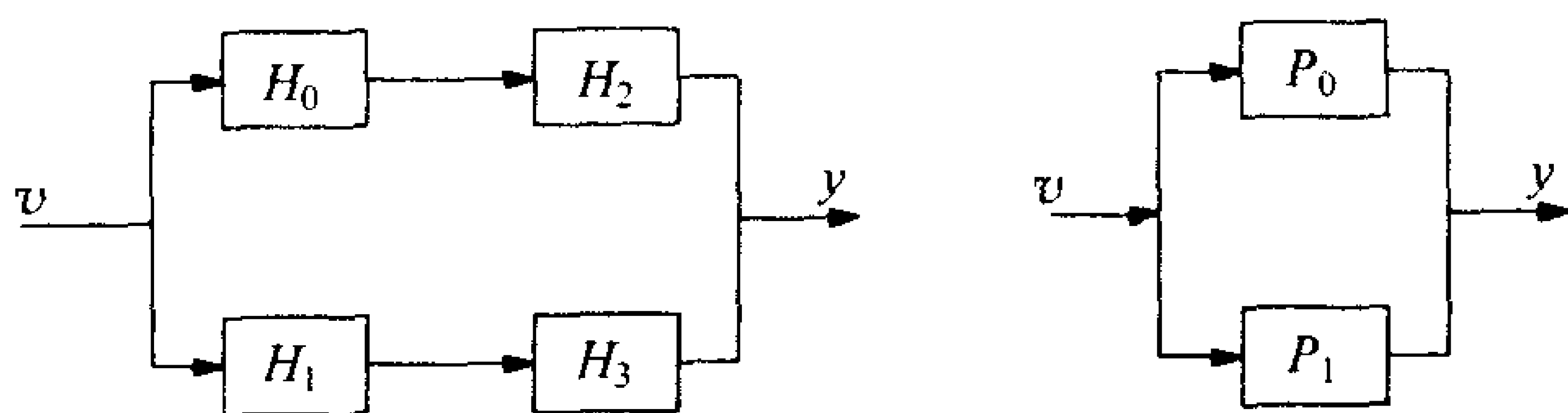


图 9-25　变形项：$P_0=H_0H_2$ 和 $P_1=H_1H_3$

189

综上所述，我们将完全重构滤波器组的设计归纳为两个步骤：

步骤 1：设计一个满足式(9-18)的低通滤波器 P_0.

步骤 2：将 P_0 分解为因子 H_0H_2，然后利用式(9-16)的条件求 H_1 和 H_3.

注意，P_0 是两个低通滤波器的乘积，P_1 是两个高通滤波器的乘积. 因此，P_0 本身就是一个低通滤波器，而 P_1 是一个高通滤波器. 选择 P_0 的方法有很多，但是一个有意义的方法是让其以 $z=-1$ 为零点或多重零点(因为我们希望它成为一个 LPF).

例 9.5　令 $P_0(z)=(1+z^{-1})^2$，即在 $z=-1$ 处有 2 个零点. 说明式(9-18)成立并求出所有 4 个滤波器.

解

$$P_0(z)=1+2z^{-1}+z^{-2}$$

$$P_0(-z)=1-2z^{-1}+z^{-2}$$

所以

$$P_0(z) - P_0(-z) = 4z^{-1}$$

对照式(9-18)可以看到，延迟是正确的，但是幅度太大. 当然，这个幅度是可以被校正的. 现在我们暂且忽略这点差异，将 P_0 分解为

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} \qquad H_2(z) = 1 + z^{-1}$$

由式(9-16)得

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} \qquad H_3(z) = -1 + z^{-1}$$

可见，如此所选择的4个滤波器确实满足 $F_0 = 4z^{-1}$，$F_1 = 0$. 它们实际上就是哈尔滤波器. 要看清这一点，只需将每个滤波器的系数除以$\sqrt{2}$而对它们进行规范化即可.（规范化就是除以它们的均方根，式(2-18)给出了离散时间能量信号的范数.） ■

例 9.6 在前一个例子中，用$(1+z^{-1})^2$ 作为 P_0 顺利地得到了结果. 现在继续这一方案，尝试令 $P_0(z) = (1+z^{-1})^4$，看式(9-18)是否成立.

190

解

$$P_0(z) = 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}$$

$$P_0(-z) = 1 - 4z^{-1} + 6z^{-2} - 4z^{-3} + z^{-4}$$

所以

$$P_0(z) - P_0(-z) = 8z^{-1} + 8z^{-3}$$

因为 P_0 不是单独的一个形如 kz^{-l}的项，所以该滤波器组不是一个完全重构滤波器. ■

其实，没有其他形如 $P_0(z) = (1+z^{-1})^N$ 的滤波器满足式(9-18)，所以对于完全重构滤波器的设计还需要进一步的研究. 一旦找到了小波与滤波器之间的联系，那么关于小波的主要工作就是解决滤波器的设计问题. 每一个完全重构滤波器都对应着一个小波基(就是说，在小波基和滤波器之间存在着一一对应的关系). 这为我们解决滤波器的设计问题提供了一个很好的途径. 设

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^{2p} Q(z) \tag{9-19}$$

其中 $Q(z)$是一个适当选取的 $2p-2$ 阶滤波器，满足式(9-18). 这意味着在例 9.4中我们应该选择

$$Q(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

从而使得

$$P_0(z) = (1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4})(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \qquad (9\text{-}20)$$

利用 P_0 的 $2p-1$ 个奇数次幂项，足以确定 $Q(z)$ 的系数.

例 9.7 求 $Q(z)$ 的系数，使得

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^4 Q(z)$$

是一个完全重构滤波器.

[191]

解 将式(9-20)的乘式展开，得

$$\begin{aligned} P_0(z) = & a_0 + (4a_0 + a_1)z^{-1} + (6a_0 + 4a_1 + a_2)z^{-2} \\ & + (4a_0 + 6a_1 + 4a_2)z^{-3} + (a_0 + 4a_1 + 6a_2)z^{-4} \\ & + (a_1 + 4a_2)z^{-5} + a_2 z^{-6} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} P_0(-z) = & a_0 - (4a_0 + a_1)z^{-1} + (6a_0 + 4a_1 + a_2)z^{-2} \\ & - (4a_0 + 6a_1 + 4a_2)z^{-3} + (a_0 + 4a_1 + 6a_2)z^{-4} \\ & - (a_1 + 4a_2)z^{-5} + a_2 z^{-6} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P_0(z) - P_0(-z) = & 2(4a_0 + a_1)z^{-1} + 2(4a_0 + 6a_1 + 4a_2)z^{-3} \\ & + 2(a_1 + 4a_2)z^{-5} \end{aligned}$$

由式(9-18)，上式的差应该等于 $2z^{-3}$. 令其等于 $2z^{-3}$，并令方程两边系数相等，得

$$\begin{aligned} 4a_0 + a_1 &= 0 \\ 4a_0 + 6a_1 + 4a_2 &= 1 \\ a_1 + 4a_2 &= 0 \end{aligned}$$

由此得到 $a_0 = -1/16$，$a_1 = 4/16$，$a_2 = -1/16$. 因此

$$P_0(z) = H_0(z)H_2(z) = \frac{1}{16}(1 + z^{-1})^4(-1 + 4z^{-1} - z^{-2})$$

P_0 除了在 $z=-1$ 处有 4 个零点外，还有 2 个零点 $z=2\pm\sqrt{3}$. 选择 $z=-1$ 处的两个零点和最小相位零点 $z=2-\sqrt{3}$作为 H_0 的零点，得

$$H_0(z) = 0.0625 + 0.10825z^{-1} + 0.0290z^{-2} - 0.01675z^{-3}$$

192 这就是由英格里德·道贝切斯(Ingrid Daubechies)设计出来的db(2)滤波器. ■

下面给出的程序用于检验一个给定的滤波器 h_0 是否满足式(9-14). 对于 $P_0=H_0H_2$，假设 H_0 和 H_2 长度相同，H_0 为最小相位的，H_2 为最大相位的.(也可能有其他情况.)换句话说，H_2 的系数是 H_0 的系数的逆向排列. 将它们代入式(9-16)得到一般的表达形式为

$$\begin{aligned} h_0 &= [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3] \\ h_1 &= [a_3 \quad -a_2 \quad a_1 \quad -a_0] \\ h_2 &= [a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0] \\ h_3 &= [-a_0 \quad a_1 \quad -a_2 \quad a_3] \end{aligned} \tag{9-21}$$

由于上式是由式(9-14)和式(9-16)得到的，所以它可以被推广到任意长度. 下面的程序用于检验一个长度为6的滤波器 h_0(db(3)滤波器). 程序的下方是运行结果. 我们看到，y 列中，除了中间项以外，其他项都为零，这表明该滤波器是完全重构的.

```
N=6;
a0=0.2352;    % 定义系数 a0 至 a5
a1=0.5706;
a2=0.3252;
a3=-0.0955;
a4=-0.0604;
a5=0.0249;
h0=[a0 a1 a2 a3 a4 a5];  % 定义 h0
h2=fliplr(h0);          % 定义 h2
p0=conv(h0,h2);  % 乘多项式
for k = 1:N      % 式(9-16)定义滤波器 h1 和 h3
  h1(k)=(-1)^(k+1)*h2(k);
  h3(k)=(-1)^k*h0(k);
end
p1=conv(h1,h3);  % 乘多项式
y=p0+p1;  % 变形项
disp([p0' p1' y']) % 显示 p0, p1, y

 0.0059 -0.0059   0
 0.0000  0.0000   0
-0.0488  0.0488   0
 0.0000  0.0000   0
 0.2930 -0.2930   0
 0.5000  0.5000 1.000
 0.2930 -0.2930   0
 0.0000  0.0000   0
```

193

```
-0.0488  0.0488    0
 0.0000  0.0000    0
 0.0059 -0.0059    0
```

运行结果的第 3 列是 $y=P_0+P_1$. 因为除了中间项以外其他各项都为零，所以它是一个完全重构滤波器.

194

第 10 章　实用小波和滤波器

科学和工程的不同门类之间常常具有某种联系，而信号理论与小波之间却有着惊人的一致．本章将采样率改变（第 6 章）、正交镜像滤波器（第 9 章）和小波（第 8 章）等概念结合起来，以便由波形方便地计算出小波系数（分解），也能够由小波系数方便地重构原始波形（合成）．

本章目标　**读完本章以后，读者应该掌握：**

- 给定第 j 层的尺度系数，求第 $j-1$ 层尺度系数和小波系数（即利用函数的采样求哈尔小波变换）．
- 求哈尔小波变换的变换矩阵．

10.1　实用小波

图 10-1 给出了第 0 层（φ_{00} 和 ψ_{00}）、第 1 层（φ_{10}，φ_{11}，ψ_{10} 和 ψ_{11}），直到第 n 层的尺度函数和小波，总共包含 2^n 个尺度函数和 2^n 个小波．在计算小波变换时，要同时用到 φ_{00} 和 ψ_{00}．但此后，只需要用到小波．我们可以从最底部开始，从下往上计算，首先计算 c_{00} 和 d_{00}，然后是 d_{10} 和 d_{11}，接下来是 d_{20} 和 d_{21}，依次类推，直到第 n 层．然而，我们也可以从最顶部开始计算，先计算第 n 层的小波系数，然后往下一直计算到第 0 层为止．假如采用式（8-11），计算方向是无关紧要的．无论按哪个方向，当计算到第 n 层时都需要计算 $2^{n+1}-1$ 个小波系数和 1 个尺度函数系数．

非常凑巧的是第 $n+1$ 层尺度函数系数可以被用来计算第 n 层尺度函数系数和小波系数．当然，要这样做还需要知道滤波器系数（参照式（8-13）和式（8-14））．一旦滤波器系数确定下来，利用相同的滤波器系数就可以用第 n 层的尺度函数系数计算第 $n-1$ 层的尺度函数系数和小波系数．这一过程可以继续下去，直到第 0 层为止．换句话说，只要我们知道了第 $n+1$ 层尺度函数系数和滤波器系数，就可以求出所有 n 层小波变换．要注意，我们所说的是利用尺度函数（不是小波）和滤波器系数来同时计算下一层尺度函数系数和小波系数．

在图 10-1 中，从第 n 层往下直到第 0 层，每往下一层，尺度函数（还有小波）的宽度增加一倍．这类似于按因子 2 下采样，事实上，这一过程与按 2 下采样的关系还不止于这种相似性．使用下采样和 QMF 滤波器滤波是计算小波系数的常用方法．注意，第 $n+1$ 层有 2^{n+1} 个尺度函数系数，它正好与第 n 层小波变换系数的个数相同．本节的目标就是讲述怎样使用第 $n+1$ 层尺度函数系数计算

第 n 层小波变换.

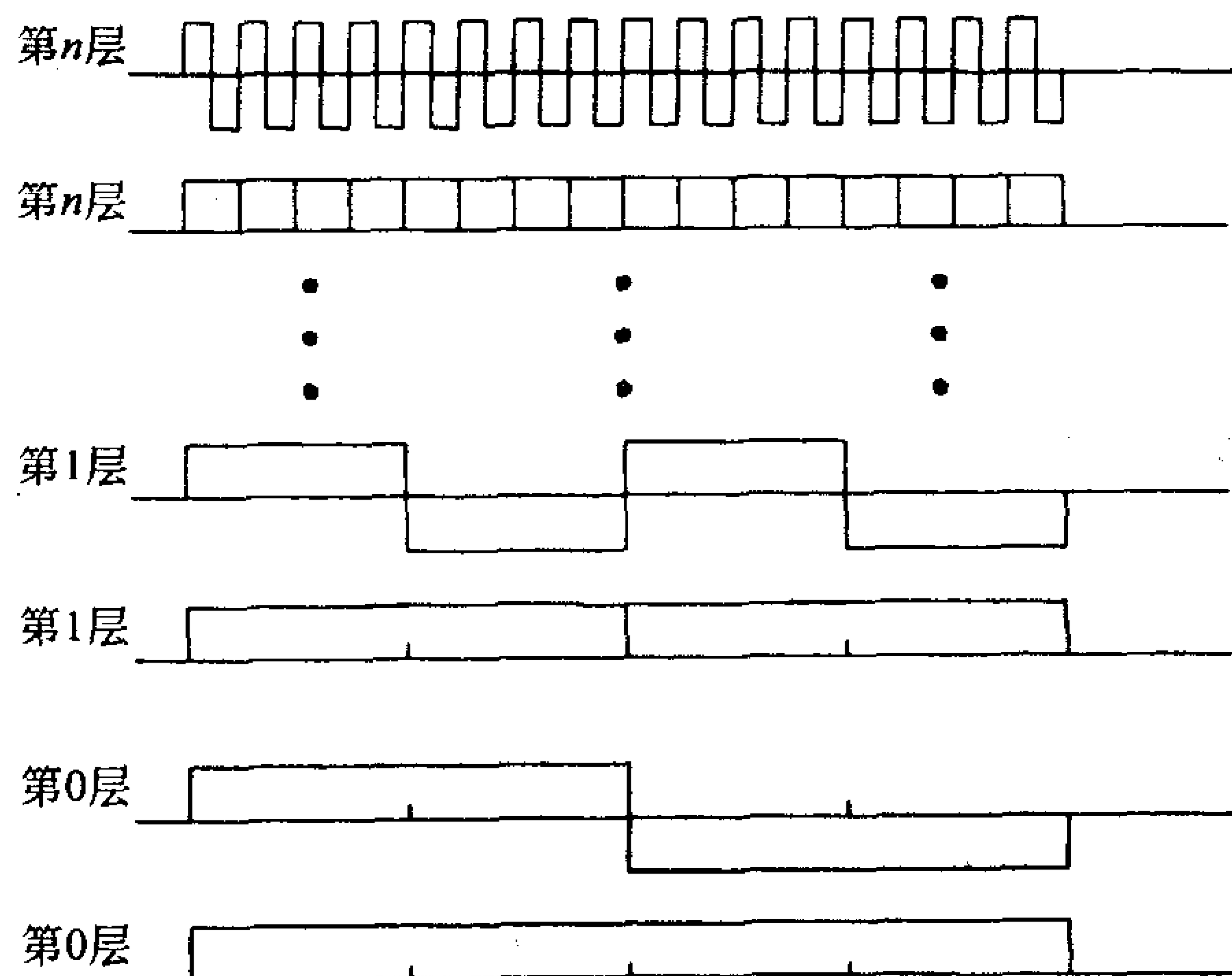


图 10-1 从第 n 层到第 0 层的小波和尺度函数

接下来将是一些枯燥但是很重要的推导. 回忆向前(分解)方程，把它们重写如下：

$$c_{jk} = \langle v(t) \mid \varphi_{jk}(t) \rangle$$
$$d_{jk} = \langle v(t) \mid \psi_{jk}(t) \rangle \qquad \text{重写式(8-11)}$$

196

合成方程重写如下：

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{Jk}\varphi_{Jk}(t) + \sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk}\psi_{jk}(t) \qquad \text{重写式(8-12)}$$

还有式(8-13)和式(8-14)，它们为尺度函数和小波建立了两个重要的关系，为了便于叙述，也重写如下：

$$\varphi(t) = \sum_k h_0(k)\sqrt{2}\varphi(2t-k) \qquad \text{重写式(8-13)}$$

$$\psi(t) = \sum_k h_1(k)\sqrt{2}\varphi(2t-k) \qquad \text{重写式(8-14)}$$

它们分别被称为尺度函数的二尺度关系(two-scale relation for scaling function)和小波的二尺度关系(two-scale relation for wavelet)，式中的符号 h_0 和 h_1 表示滤波器. 还要注意的是这里的运算均为卷积运算，类似于第 6 章. 现在我们将利用这些方程来推导式(8-11)所表示的小波系数之间的另外两个重要关系.

记 V_{j+1} 为可以用第 $j+1$ 层尺度函数表示的所有函数的集合，即

$$V_{j+1} = \operatorname*{span}_{k}\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}t-k)\}$$

这就是说，V_{j+1}是一个集合，它包含了所有可以用第 $j+1$ 层尺度函数来表示的函数. 如果 $v(t)\in V_{j+1}$，那么 $v(t)$可以只用尺度函数(没有小波)表示为

$$v(t) = \sum_{k} c_{j+1}(k)2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}t-k)$$

但是，$v(t)$也可以用更低一层分辨率的尺度函数和小波表示为

197

$$v(t) = \sum_{k} c_{j}(k)2^{j/2}\varphi(2^{j}t-k) + \sum_{k} d_{j}(k)2^{j/2}\psi(2^{j}t-k)$$

我们用图 10-2 所示的例子来说明这一点. 顶部的函数 $v(t)$可以用尺度函数 φ_{3k}表示(图中没有画出). 如我们所看到的那样，其系数就是拿这 8 个信号值分别除以 $2\sqrt{2}$(第 3 层尺度函数值). 但是，$v(t)$也可以用图中所示的第 2 层尺度函数和小波表示. 这样也会得到 8 个系数，利用这 8 个系数就可以将函数按 φ_{2k}和 ψ_{2k}表示出来.

练习 10.1 求对应于 φ_{2k}的 4 个尺度系数和对应于 ψ_{2k}的 4 个小波系数，使之能表示图 10-2 中的函数. 图中每个尺度函数和小波的高度均为 2.

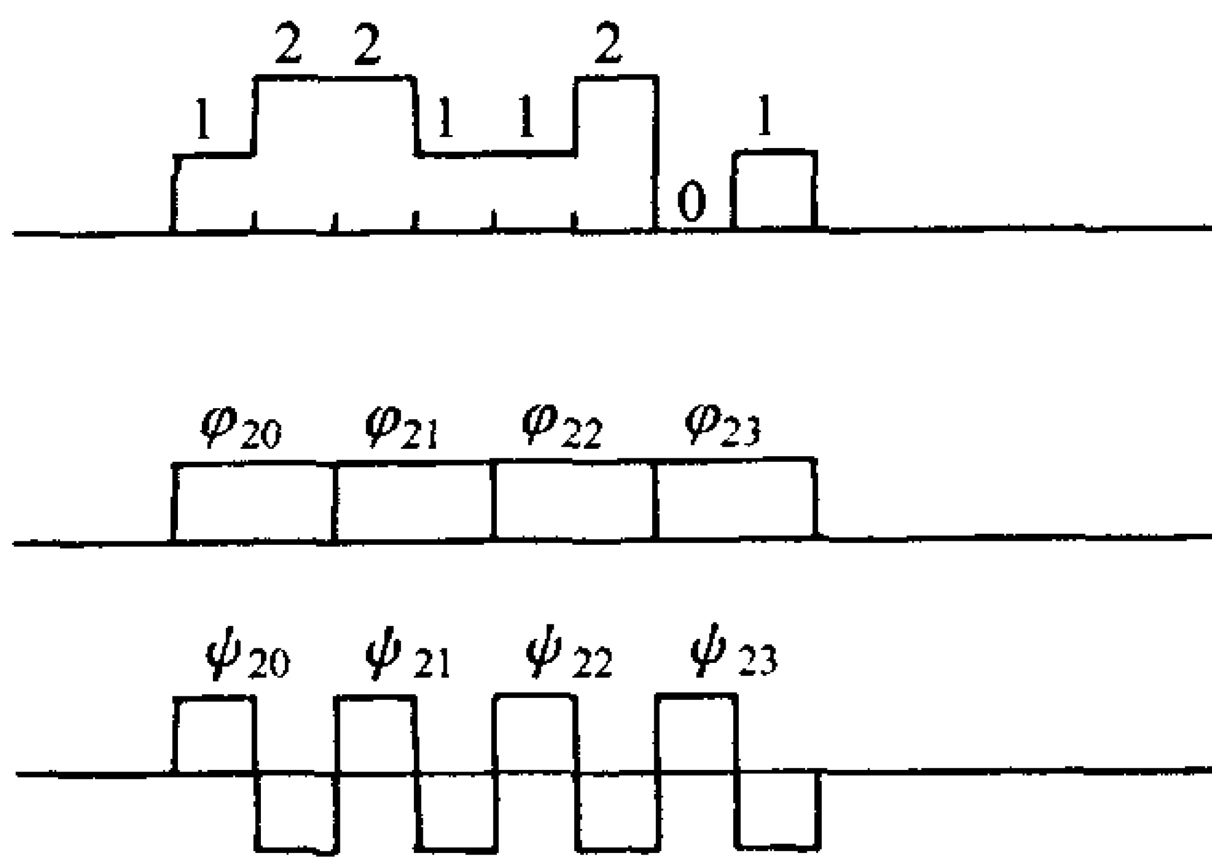


图 10-2 $v(t)$的表示

答案：$c_2(k)=\{0.75，0.75，0.75，0.25\}$

$d_2(k)=\{-0.25，0.25，-0.25，-0.25\}$.

现在我们知道，只要知道了第 3 层尺度函数的系数就有足够的信息来计算第 2 层尺度和小波系数，这无疑为我们直接建立某一层尺度函数与其下一层尺度函数和小波之间的联系提供了重要线索. 下面要推导的这个关系是小波理论中最神奇的部分. 我们将一个记号稍作改变，将 c_{jk}改记为 $c_j(k)$，使得上述方程看起来更像滤波运算.

现在开始推导：由式(8-11)得到系数 c_{jk} 按内积的表示

$$c_j(k) = \langle v(t) \mid \varphi_{jk}(t)\rangle = \int v(t)2^{j/2}\varphi(2^j t - k)\mathrm{d}t \tag{10-1}$$

为了获得 $\varphi(2^j t-k)$ 的表达式，利用式(8-13)，并对尺度函数作伸缩和平移，得

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_n h_0(n)\sqrt{2}\varphi(2(2^j t - k) - n)$$

$$= \sum_n h_0(n)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t - 2k - n)$$

作变量替换，令 $m=2k+n$，即 $n=m-2k$，得

198

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_m h_0(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t - m)$$

将上式代入式(10-1)并交换求和与积分的顺序，得

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)\int v(t)2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}t - m)\mathrm{d}t$$

该表达式中的积分是式(8-11)在 $j+1$ 尺度下的内积，于是有

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \tag{10-2}$$

通过类似的推导可以得到小波系数的关系式为

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m) \tag{10-3}$$

式(10-2)和式(10-3)表明 $c_{j+1}(k)$ 为计算所有较低尺度下的系数提供了足够的信息. 这两个公式是简化小波系数计算的关键. 由第 $j+1$ 层尺度系数 $c_{j+1}(k)$ 可以计算出第 j 层尺度系数和小波系数. 依次类推，就可以计算出所有较低分辨率下的系数. (当然，滤波器 h_0 和 h_1 的系数必须是已知的.)假如我们已知或能够通过某种方式求出某一层系数，那么就能求出所有较低层的系数. 下面给出一个例子.

例 10.1 设给定 c_2，h_0 和 h_1 的值如下，求 c_1，d_1，c_0 和 d_0.

$$c_2 = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \quad h_0 = [1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}] \quad h_1 = [1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}]$$

解 先由式(10-2)求 c_1. 图 10-3 所示是 $c_2(m)$，$h_0(m)$和 $h_0(m-2)$. 令式(10-2)中的 $k=0$，先求乘积再求和得

199

$$c_1(0) = \sum_m h_0(m)c_2(m) = \frac{1}{\sqrt{2}}[1+2] = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

接下来，令 $k=1$，得

$$c_1(1)=\sum_m h_0(m-2)c_2(m)=\frac{1}{\sqrt{2}}[3+4]=\frac{7}{\sqrt{2}}$$

类似地，利用式(10-3)可以求得 d_1 为

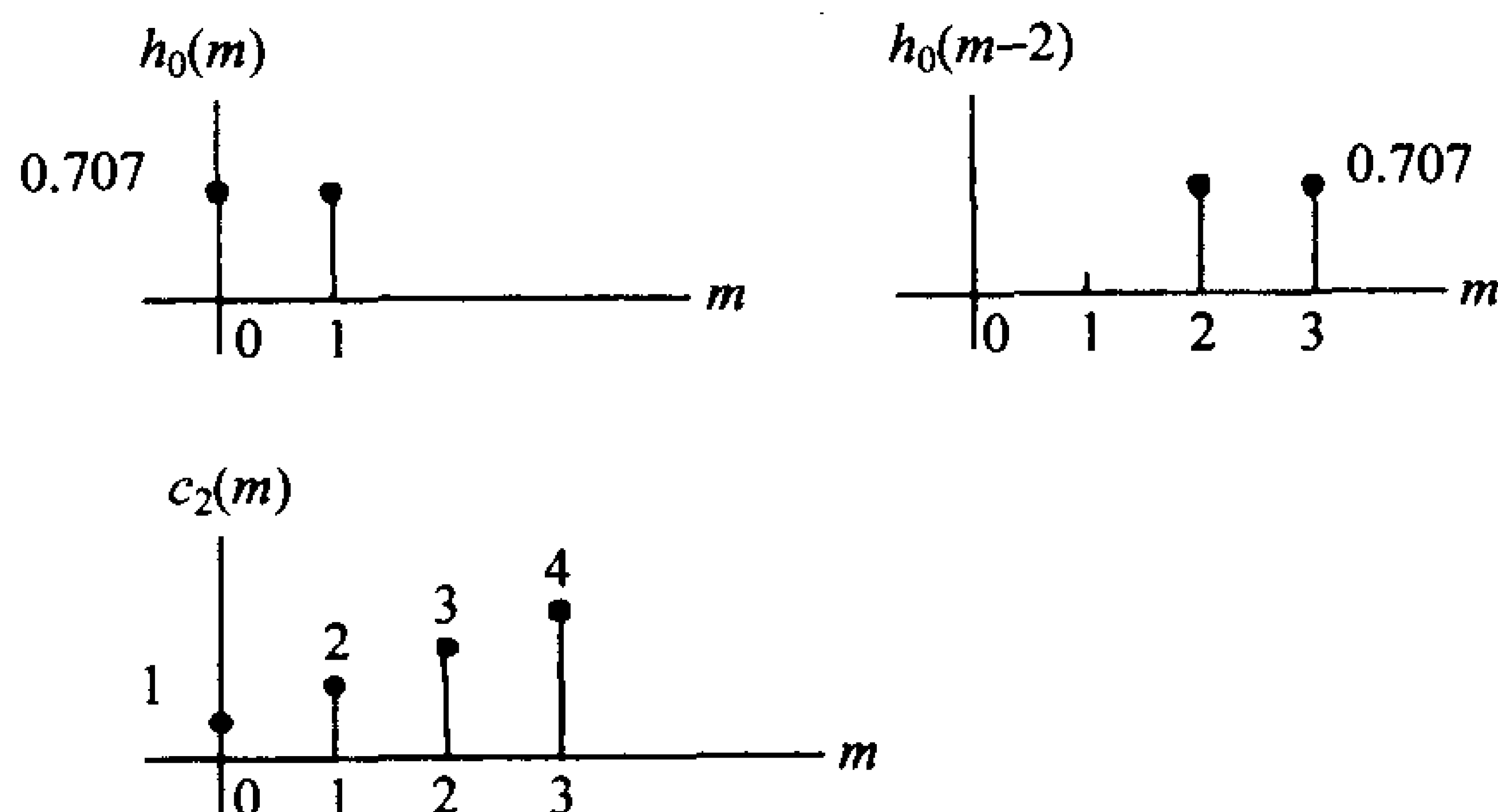
$$d_1(0)=\sum_m h_1(m)c_2(m)=\frac{1}{\sqrt{2}}[1-2]=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d_1(1)=\sum_m h_1(m-2)c_2(m)=\frac{1}{\sqrt{2}}[3-4]=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

最后得到

$$c_0(0)=\sum_m h_0(m)c_1(m)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{2}}\right]=5$$

$$d_0(0)=\sum_m h_1(m)c_1(m)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{7}{\sqrt{2}}\right]=-2$$



200

图 10-3 滤波器和初始序列 ■

练习 10.2 若已知 c_2 如下，使用例 10.1 中的滤波器 h_0 和 h_1 推导出 c_1，d_1，c_0 和 d_0.

$$c_2=[0.5 \quad 0.2 \quad -0.1 \quad 0.3]$$

答案：0.495，0.1414，0.2121，−0.2828，0.45，0.25.

注意，在这个例子中初始序列 $c_2(m)$的长度为 4. 经过相关运算和下采样之后，得到序列 $c_1(m)$的长度为 2，再经过一次同样的运算之后序列的长度将变为 1. 还要注意的是从 c_{j+1}推导 c_j 的过程等价于滤波和下采样过程. 与 $h(m)$作相关运算等价于与 $h(-m)$作卷积.

10.2 神奇的算法[⊖]

小波的神奇之处在于已知第 j 层的尺度系数 c_{jk} 就能够计算出第 $j-1$ 层的尺度系数和小波系数. 现在的问题是：怎样找到第 j 层的系数？我们的回答是：这很简单，也正是小波的神奇之处！式(8-11)告诉我们，系数 c_{jk} 可以由内积求得

$$c_{jk} = \langle v(t) \mid \varphi_{jk}(t) \rangle$$

对于哈尔变换，内积看起来就像图 10-4 所示的那样. 尺度函数 $\varphi_{jk}(t)$ 是高度固定的方波. 当它与波形 $v(t)$ 相乘并在其波宽内求积分后，其结果(近似地)正比于波形在时间 t_k 处的采样值. 因此，这些采样值经过适当的修正之后就可以作为系数 c_{jk}. 所谓的适当的修正依赖于尺度函数的宽度，而尺度函数的宽度又依赖于采样率.

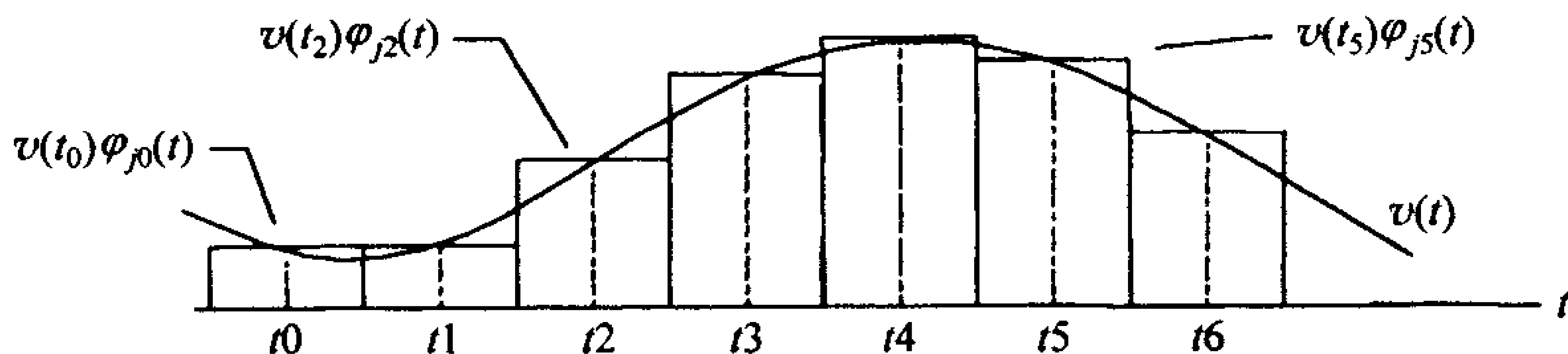


图 10-4 求内积 c_{jk}

201

利用采样间隔，我们可以对小波表示的精度进行任意的假设. 对于给定的系数 c_{jk}，最好的方式是构造阶梯函数来逼近 $v(t)$. 图 10-4 中除掉光滑曲线 $v(t)$ 的部分就是这种阶梯函数. 这与我们的直观感知是相符的. 小波系数越多，逼近效果就越好. 从极限的观点来看，随着采样个数的增加，逼近程度会越好.

例 10.2 下面举例说明以上的讨论并说明当使用采样值作为第 j 层系数时带来的误差类型. 对于区间 $0<t<1$ 内的波形 $v(t)=1+\cos(2\pi t)$，比较 $j=2$ 层的系数与经过修正后的采样值.

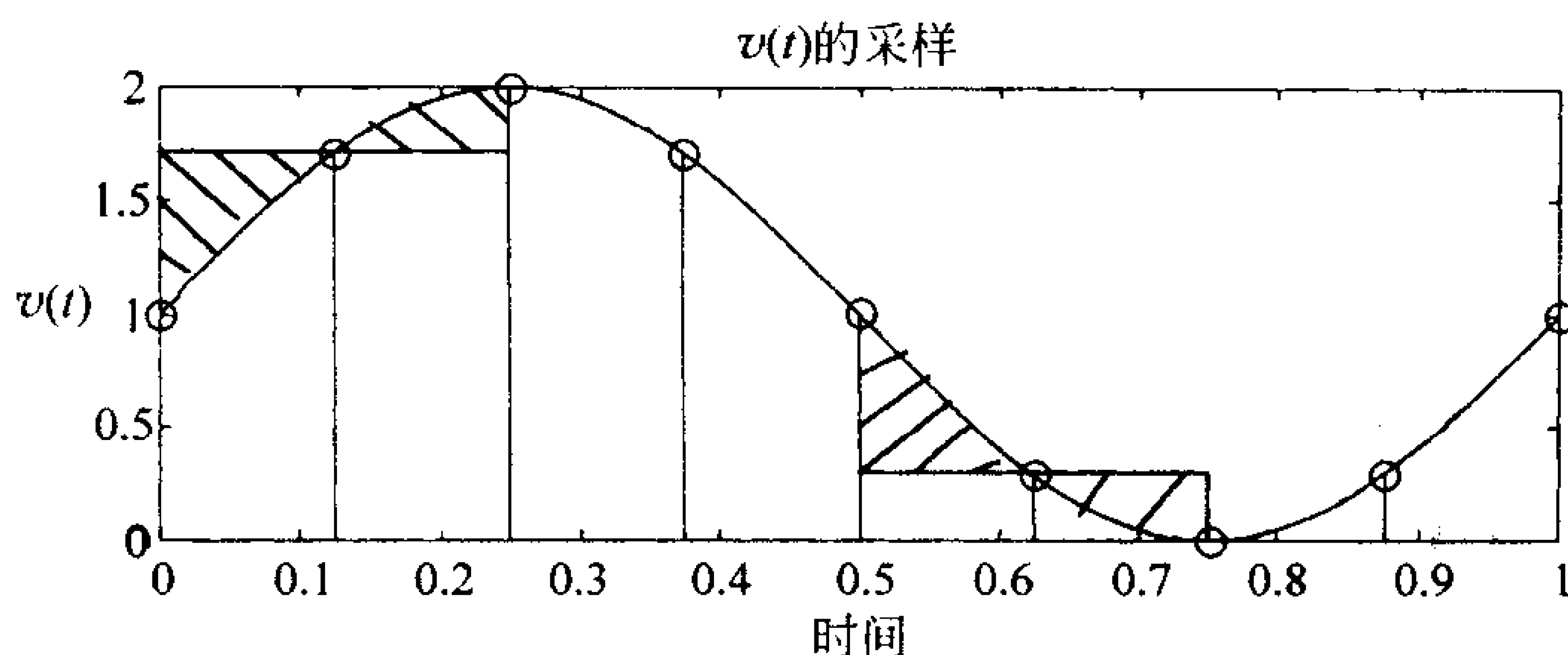
解 图 10-5 所示为波形 $v(t)$ 和它的 9 个采样，这 9 个样本分别位于 $t=0$，1/8，1/4，3/8，1/2，5/8，3/4，7/8 和 1. 为了得到所需要的采样，我们选取样本 $t=1/8$，3/8，5/8，7/8，并删掉其他样本. 完成这些操作的 MATLAB 程序如下：

```
N=8;
t=linspace(0,1,N+1); % 9个样本位于(0,1)中
v=1 + sin(2*pi*t); % 生成v的样本

a=v(2:N+1);      % 删掉第一个样本
a=reshape(a,2,N/2); % 所希望的样本在顶行
c=a(1,:);    % 选择顶行(所希望的样本)
```

⊖ 英文为 the magic part，意为“有魔力的部分”. 在这部分作者讲述信号的分解和重构算法，为使用词符合中文科技文献的平实性，意译为“神奇的算法”. ——译者注

这样，就得到 $t=1/8$，3/8，5/8，7/8 处的采样值为[1.7071 1.7071 0.2929 0.2929].



202

图 10-5 $v(t)$的采样

图 10-5 同时给出了尺度函数 $\varphi_{20}(t)$和 $\varphi_{22}(t)$，如图中的水平线所示. 阴影部分表示由于使用采样值作为系数 c_{20}和 c_{22}而引起的误差. 为了用采样值精确地表示系数，样本左右两边阴影部分的面积应该相等. 如我们所看到的那样，这种情况只有在穿过样本的函数为直线时才会发生. 在本例中误差是相当大的. 为了得到系数，将采样值乘以规范常数 2 再乘以脉冲宽度 1/4. (规范常数为 2 是因为我们已经乘了两次$\sqrt{2}$.)从而得到系数 [0.8536 0.8536 0.1464 0.1464]. 结果并不是十分精确，原因是我们只用了 4 个采样值. 随着采样的增加，精度也会增加. ■

例 10.3 求图 10-6 所示信号的哈尔小波变换.

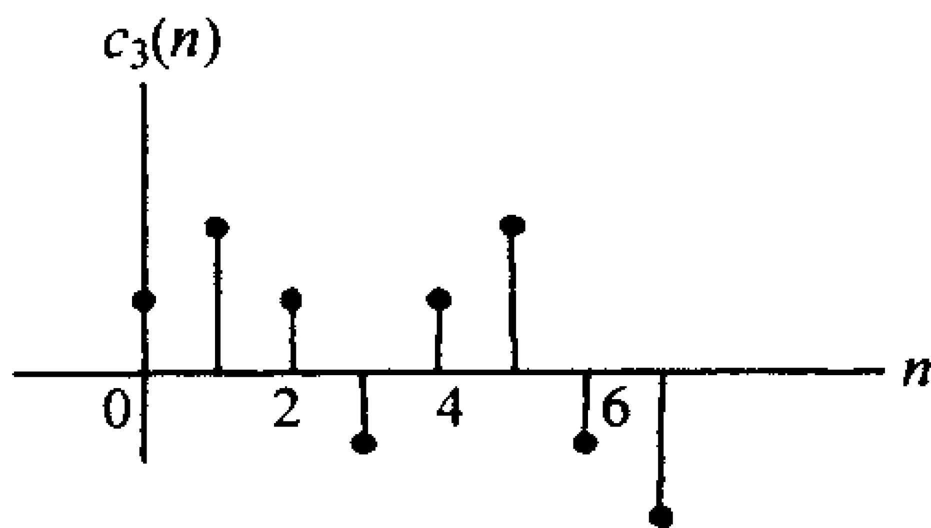


图 10-6 任意信号

解 本例利用采样率改变和 QMF 滤波器求小波系数. 在 MATLAB 中定义 c_3 为

```
c3 = [1  2  1  -1  1  2  -1  -2]
```

得到图 10-6 所示的信号. 把它看成是从一个连续时间信号中采样得到并经过适当修正之后的系数，当然也可以把它当成是离散时间信号值. 无论怎样，都把它记为 c_{3k}，或 $c_3(k)$，$k=0$，1，…，7.

使用哈尔小波，并用下面的语句定义 QMF 滤波器组 h_0，h_1，h_2，h_3.

```
h0=[1 1]/sqrt(2);
h1=[1 -1]/sqrt(2);
h2=h0;
h3=fliplr(h1);
```

图 10-7 给出了求变换的过程. 通过滤波和下采样计算系数 c_2 和 d_2.

203

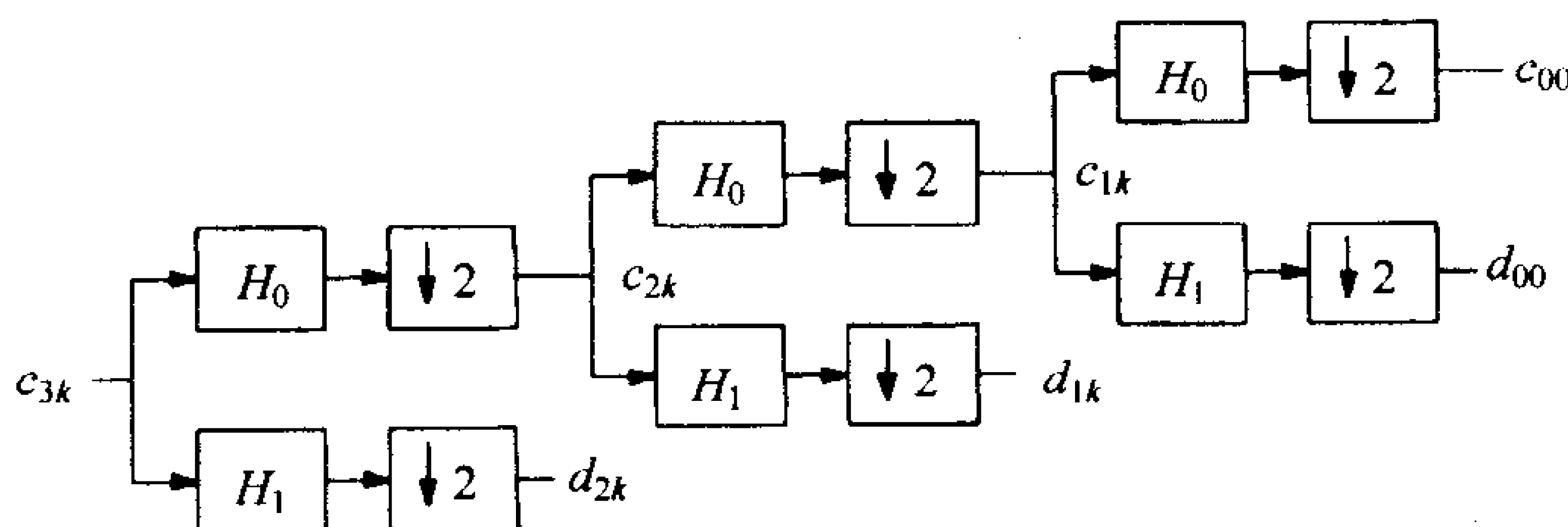


图 10-7 分解过程

首先滤波.

```
s0=conv(h0,c3);
s1=conv(h1,c3);
```

得到的 s_0 和 s_1 各包含 9 个值. 由于第一个和最后一个值表示暂态过程，所以要将它们去掉.（其原因与信号进入和离开一个移位寄存器的情形相似.）用下面的语句去掉第一个值.

```
N=8;
s0=s0(:,2:N+1);
s1=s1(:,2:N+1);
```

然后通过下采样去掉最后一个值.

```
s0=reshape(s0,2,N/2);
s1=reshape(s1,2,N/2);
c2=s0(1,:);
d2=s1(1,:);
```

从而得到

```
c2 = [2.1213 0 2.1213 -2.1213]
d2 = [0.7071 -1.4142 0.7071 -0.7071]
```

到这里完成了图 10-7 中的第 1 步. 以下是完成这一步的完整程序.

```
c3 = [1 2 1 -1 1 2 -1 -2];
h0=[1 1]/sqrt(2);
h1=[1 -1]/sqrt(2);
h2=h0;
```

204

```
h3=fliplr(h1);
N=8;
s0=conv(h0,c3);    % ← 滤波
s1=conv(h1,c3);    % ←
s0=s0(:,2:N+1);    % ← 去掉第一个值
s1=s1(:,2:N+1);    % ←
s0=reshape(s0,2,N/2);    % ←下采样
s1=reshape(s1,2,N/2);    % ←
c2=s0(1,:);        % ← 得 c2
d2=s1(1,:);        % ← 得 d2
```

图 10-7 的第 2 步与第 1 步的过程完全一样. 重复上面的程序，并进行必要的修改，得

```
N=N/2;
s0=conv(h0,c2);    % ← 滤波
s1=conv(h1,c2);    % ←
s0=s0(:,2:N+1);    % ← 去掉第一个值
s1=s1(:,2:N+1);    % ←
s0=reshape(s0,2,N/2);    % ←下采样
s1=reshape(s1,2,N/2);    % ←
c1=s0(1,:);        % ← 得 c1
d1=s1(1,:);        % ← 得 d1
```

这里唯一的改变是前 3 条语句和最后 2 条语句. 执行程序后得到

```
c1 = [1.5 0]
d1 = [-1.5 -3]
```

再次重复以上过程，得到

$c_{00} = 1.0607$

$d_{00} = -1.0607$

在得到的所有系数中选取下面 8 个来表示原始波形 c_3. 它们是$[c_{00}\ d_{00}\ d_{10}\ d_{11}\ d_{20}\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}]$，这样，$c_3$ 的哈尔小波变换就为

$$[1.0607 \quad -1.0607 \quad -1.5 \quad -3 \quad 0.7071 \quad -1.4142 \quad 0.7071 \quad -0.7071]$$

■

205 这样，我们就完成了该例的分解. 下面我们来验证这样的分解与小波变换是一致的. 把 c_{3k}看成连续时间波形 $v(t)$的采样，如图 10-8 所示. 为了计算小波系数 c_{00}，需要求 $v(t)$与 $\varphi_{00}(t)$的内积，也就是将波形乘以一个常数再求乘积在区间上的积分. 现在我们对 c_{3k}关于 $k=0, 1, \cdots, 7$ 求和，以此作为该内积的近似. 求得结果为 3，它不等于 c_{00}. 将它除以 $2\sqrt{2}$就得到正确的结果 $c_{00}=1.0607$，其中 $2\sqrt{2}$是 φ_{3k}相对于 φ_{00}的规范因子.

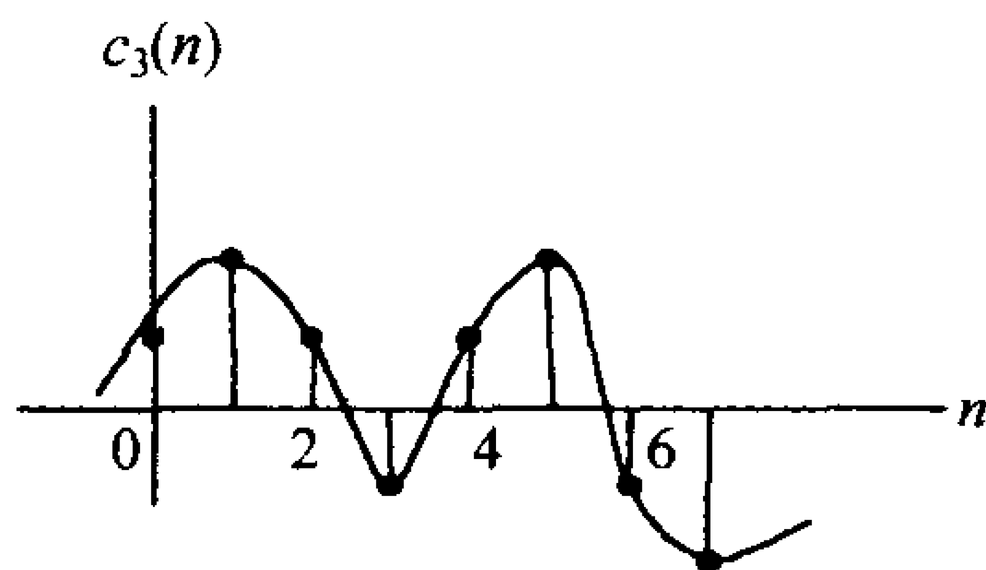


图 10-8　把 c_3 看成连续时间波形 $v(t)$ 的采样

系数 d_{00} 是 $v(t)$ 与 $\psi_{00}(t)$ 的内积. 为了求它的近似值，将 c_{3k} 的前 4 个值减去后 4 个值(因为 $\psi_{00}(t)$ 的前半个周期为 +1，后半个周期为 −1)，将得到的结果再除以 $2\sqrt{2}$，得到 $d_{00}=-1.0607$，这是正确的结果. 此外，d_{10} 可以由下面的式子求得.

$$d_{10}=\frac{c_{30}+c_{31}-c_{32}-c_{33}}{2}=-1.5$$

用类似的式子即可求得 d_{11}. 通过求 c_{3k} 相邻元素的差再除以 $\sqrt{2}$ 即可求得 d_{2k}. 因此，通过滤波得到的小波系数与采用例 10.3 的方法计算所得的小波系数是一致的.

例 10.4　用小波系数重构图 10-6 的波形 $c_3(n)$.

解　将 8 个小波系数 $[c_{00}\ d_{00}\ d_{10}\ d_{11}\ d_{20}\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}]=[1.0607\quad -1.0607\quad -1.5\quad -3\quad 0.7071\quad -1.4142\quad 0.7071\quad -0.7071]$ 用于图 10-9 中的滤波-上采样过程. 首先分别对 c_{00} 和 d_{00} 上采样得到信号 $[1.0607\quad 0]$ 和 $[-1.0607\quad 0]$，将它们分别与 h_2 和 h_3 作卷积，再将两个卷积结果相加得到 c_{1k}. 这里，$[1\quad 1]/\sqrt{2}$ 与 $[1.0607\quad 0]$ 作卷积的结果为 $[0.7500\quad 0.7500\quad 0]$，$[-1\ 1]/\sqrt{2}$ 与 $[-1.0607\quad 0]$ 作卷积的结果为 $[0.7500\quad -0.7500\quad 0]$. 它们的和为

206

$$[0.7500\quad 0.7500\quad 0]+[-0.7500\quad -0.7500\quad 0]=[1.500\quad 0\quad 0]$$

去掉最后的零就得到 $c_{1k}=[1.500\ 0]$.

下面是执行这一过程的 MATLAB 程序.

```
% 逆过程
p0=[c0 0]; % 上采样 c0
p1=[d0 0]; % 上采样 d0
q0=conv(p0,h2) % 与 h2 作卷积
q1=conv(p1,h3) % 与 h3 作卷积
c1=q0+q1;    % 和
c1=c1(:,1:N)  % 去掉最后的零
```

按图 10-9，在下一个步骤中，上分支 $(\uparrow 2)H_2$ 的输入是 c_{1k}. 该分支对 c_{1k} 上采样，然后再与 $h_2(k)$ 作卷积. 然后，下分支对 d_{1k} 上采样再与 $h_3(k)$ 作卷积. 用

下面的程序段(与上面的程序基本相同)可以执行这一操作并求和，得 c_{2k}.

```
N=2*N;
p0=[c1
  0 0];
p0=p0(:)'; %上采样 c1
p1=[d1
  0 0];
p1=p1(:)'; %上采样 d1
q0=conv(p0,h2) %与 h2 作卷积
q1=conv(p1,h3) %与 h3 作卷积
c2=q0+q1;     %和
c2=c2(:,1:N)   %去掉最后的零
```

207

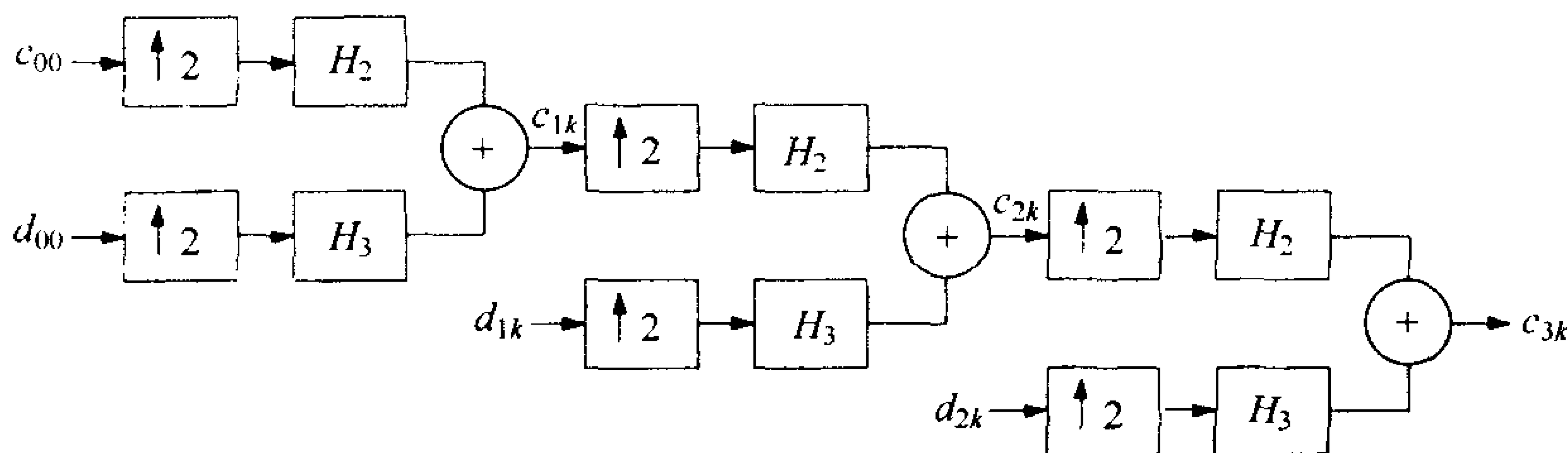


图 10-9 重构过程

再次重复这一过程就可以得到原始信号 c_3. ■

10.3 其他小波

图 10-7 将分解过程(小波正变换)表示为一系列的滤波-下采样运算. 图 10-9 将重构过程(小波逆变换)表示为一系列的上采样-滤波运算. 假如把这两种运算重叠起来，那么输出就应该等于输入. 事实上，例 10.3 和例 10.4 证明了对于哈尔小波而言，这一结果是正确的. 现在的问题是：其他小波会不会也有这一性质呢?

实际上，我们很少去找小波而是去找滤波器. 能够构造小波的滤波器被称为是完全重构滤波器，所以，有许多完全重构滤波器. Ingrid Daubechies 进一步导出了具有最好光滑性的完全重构滤波器，它是我们所期望的另外一个性质. MATLAB 的小波工具箱包含了产生 Daubechies 滤波器的命令 dbaux(N)，其中的 N 表示阶. 例如

dbaux(1) = [0.500 0   0.500 0]

dbaux(2) = [0.341 5   0.591 5   0.158 5   − 0.091 5]

dbaux(3) = [0.235 2   0.570 6   0.325 2   − 0.095 5   − 0.060 4   0.024 9]

全部系数的范数均为 0.7071 而不是 1. 注意，哈尔滤波器是第一个 Daubechies 滤波器. 另外，N 阶滤波器的长度为 $2N$. 图 10-10 所示为二阶 Daubechies 尺度函数和小波. 图中的两条曲线是由下面的上采样和卷积得到的. 产生尺度函数的算法如下.

1. 令 h=dbaux(2).
2. 令 a=fliplr(h).
3. 按 2 上采样 $a(n)$.
4. 求 h 与 a 的卷积，即令 a=conv(h, a).
5. 重复步骤 3 和步骤 4.

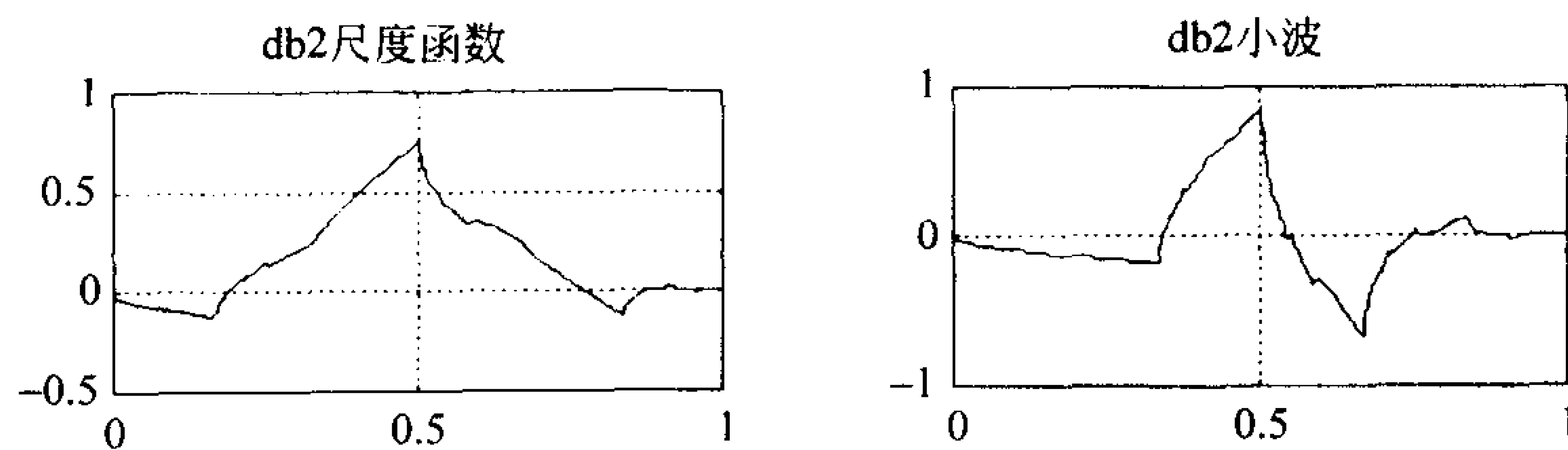


图 10-10 db2 函数

为了得到小波，在步骤 2 中用$(-1)^n$ 乘以 $a(n)$. 要注意的是每重复一次上述过程，a 的长度增加一倍，即 a 的长度按指数级增加，所以第 3 步和第 4 步不能重复次数太多. 下面我们给出产生图 10-10 的程序. [208]

```
k=2; % 标准化常数
h=[0.3415 0.5915 0.1585 -0.0915]; % 滤波器 h
a=fliplr(h); % 初始尺度函数
w=[-0.0915 -0.1585 0.5915 -0.3415]; % 初始小波
for m = 1:7 %迭代
 b=[  a
   zeros(size(a))]; % 上采样 a
 a=b(:)'; % 插入交互零
 a=conv(h,a); % h 与 a 作卷积
 a=k*a;
 n=length(a);
 a=a(1,1:n-1); % 删掉零项
end
n=length(a); % 绘制尺度函数
x=linspace(0,1,n);
subplot(321)
plot(x,a,'k')
grid on
title('db2 scaling functin')
for m=1:7 % 计算小波 w
 b=[  w
   zeros(size(w))];
```

```
 w=b(:)'; %插入交互零
 w=conv(h,w); %h与 w 作卷积
 w=k*w;
 n=length(w);
 w=w(1,1:n-1);
end
n=length(w); % 绘制小波
x=linspace(0,1,n);
subplot(322)
plot(x,w,'k')
grid on;  title('db2 wavelet')
```

209

练习 10.3 设 db(3)的滤波器系数如下，生成并画出 db(3)的尺度函数与小波.

$$h = [0.2352 \quad 0.5706 \quad 0.3252 \quad -0.0955 \quad -0.0604 \quad 0.0249]$$

答案：见图 10-11.

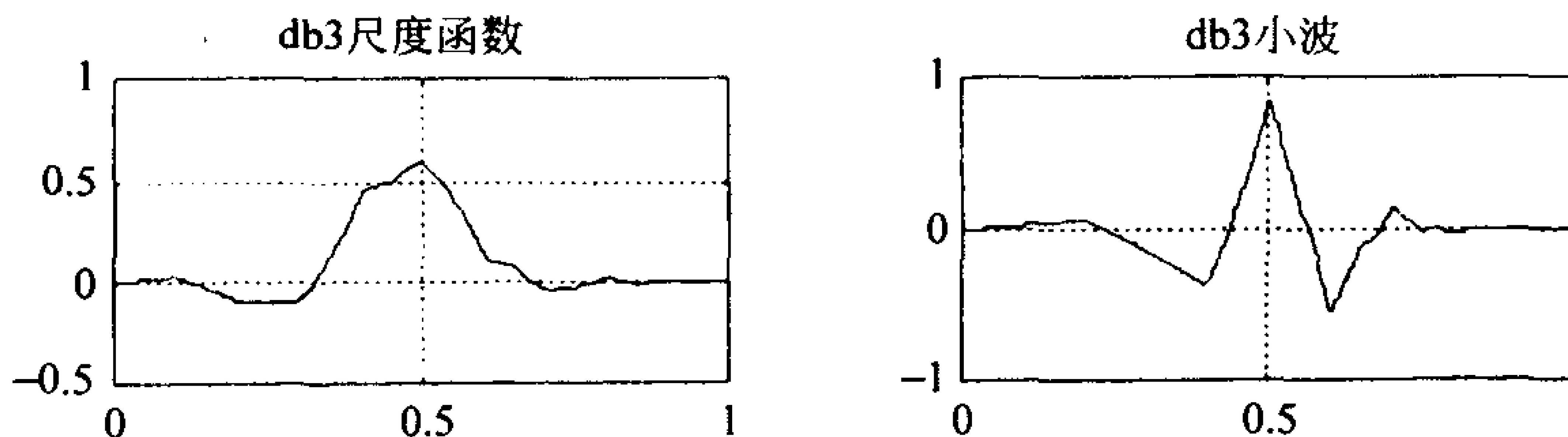


图 10-11 db3 函数

双正交性

正交多分辨率分析(MRA)定义 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补. MRA 为正交的一个充分条件是

$$W_0 \perp V_0$$

正交性是小波构造中一个很强的限制. 哈尔小波是唯一具有有限支撑同时又是对称和正交的实值小波. 将正交小波推广到双正交小波可以得到更大的灵活性.

本节的目的是给出这种小波的一个例子. 在第 3.4 节我们已经为本节的讨论提供了基础. 回顾对偶集的概念，我们说$\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$与$\{y_1, y_2, \cdots, y_N\}$是向量对偶集，如果它们满足

210

$$\langle x_i \mid y_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,j, = 1,2,\cdots,N \qquad \text{重写式(3-5)}$$

将此概念应用到小波中时，双正交条件(biorthogonality condition)意味着存在一个对偶尺度函数$\tilde{\varphi}$和一个对偶小波$\tilde{\psi}$，它们使得子空间 $\widetilde{V}_j$ 和 $\widetilde{W}_j$ 生成一个对偶MRA，即

$$\widetilde{V}_j \perp W_j \quad 和 \quad V_j \perp \widetilde{W}_j \tag{10-4}$$

为了弄清这个概念，考虑由所有长度为 8 的离散时间信号组成的集合. 图 10-12所示为 V_3 的一组基，它由左边所示 V_2 的基和右边所示 W_2 的基组成. 这就是通常所使用的哈尔小波基.

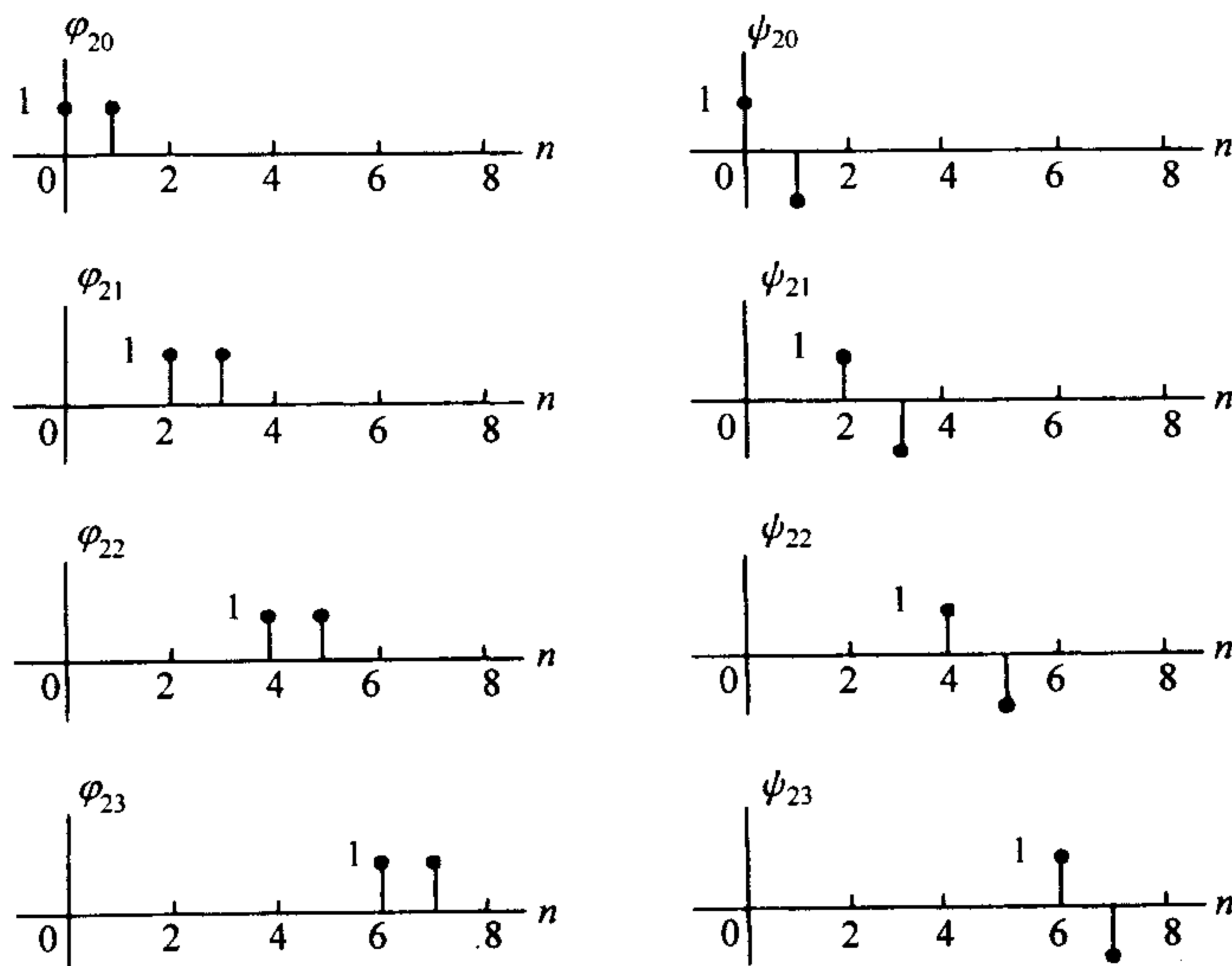


图 10-12 V_3 常用的基

图 10-12 中的基向量是彼此正交的. (假如进行适当的伸缩，它们还是规范正交的.)除了尺度以外，此时对偶基向量是相同的. 相比之下，图 10-13 中的 8 个基向量彼此不正交. 它们彼此独立，所以构成基，但是并不都是彼此正交的. 例如，x_1 与 x_5 就不正交，这意味着，此时对偶基向量与诸 x_i 向量是不同的. 211

图 10-14 给出了图 10-13 中所示基的对偶基. 它们可以由第 3.4 节给出的方法计算得到. 注意这两个集合的几个重要特征.

1. 向量$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$与$\{\varphi_{20}, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}\}$相同. 令$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}=V_2$，$\{x_5, x_6, x_7, x_8\}=W_2$.

2. 向量$\{y_5, y_6, y_7, y_8\}$与$\{\psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}\}$相同. 令$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}=\widetilde{V}_2$，$\{y_5, y_6, y_7, y_8\}=\widetilde{W}_2$.

因此，满足式(10-4)，即

$$\widetilde{V}_2 \perp W_2 \quad 和 \quad V_2 \perp \widetilde{W}_2$$

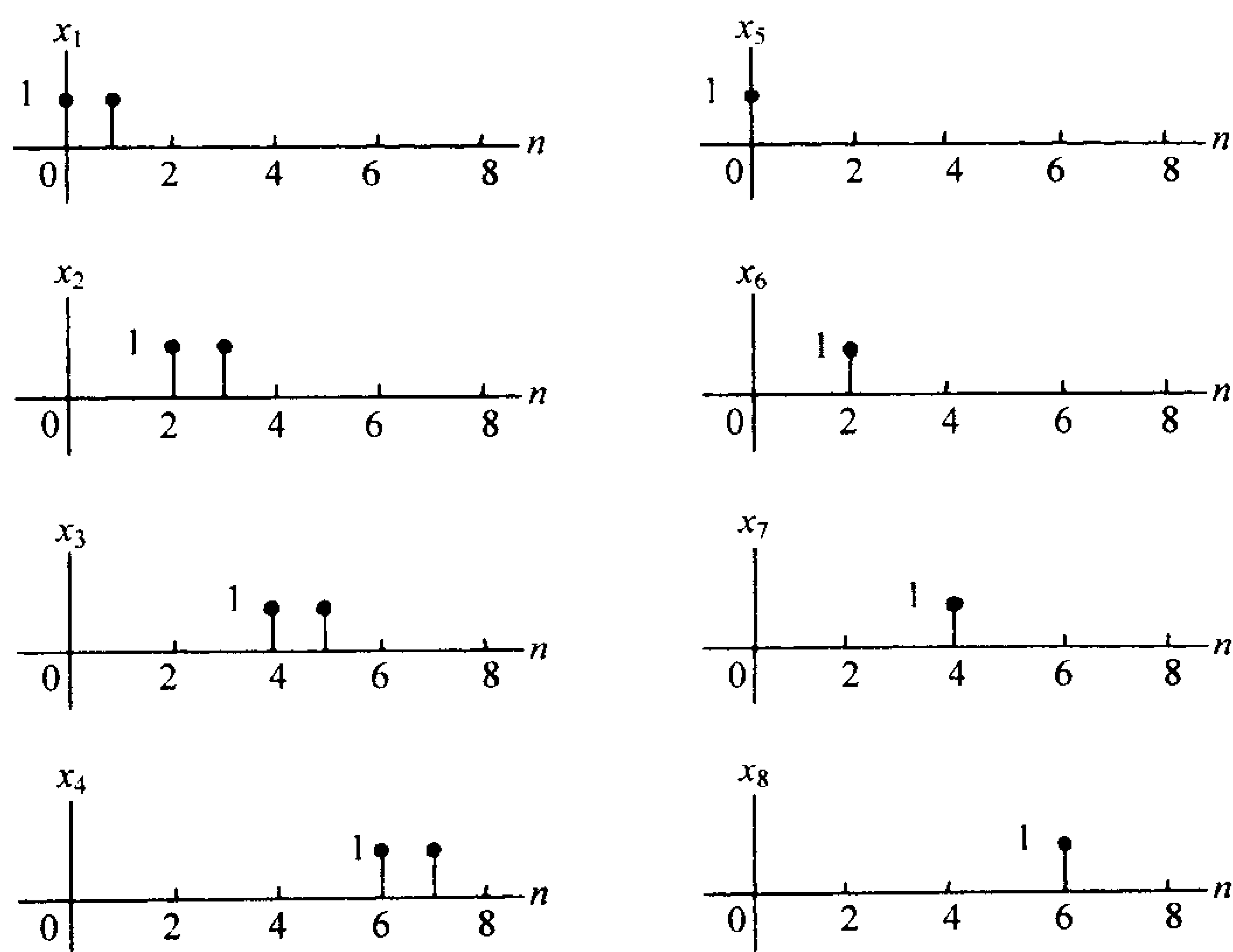


图 10-13 V_3 的另一个基

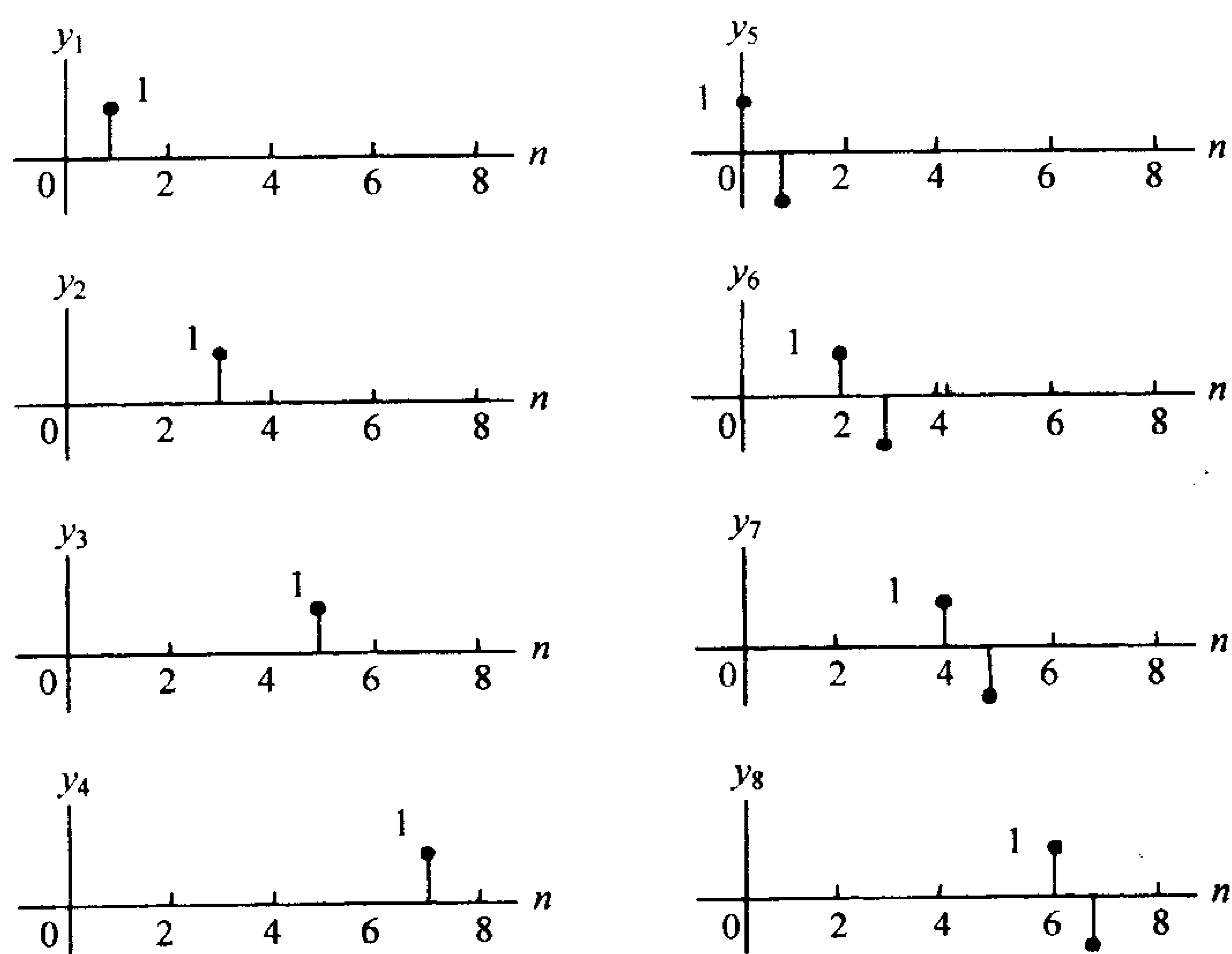


图 10-14 图 10-13 的对偶基

注意，$V_3 = V_2 + W_2$，尽管此处的和不是正交和. 比较图 10-14 中的向量和图 10-13中的向量，可以看到 $\psi_{20} = 2x_5 - x_1$，依次类推. 类似地，有 $\varphi_{20} = 2y_1 +$

y_5，依次类推．使用式(2-22)可以计算它们的夹角．例如，x_1 与 x_5 的夹角为

$$\cos\theta = \frac{\langle x_1 \mid x_5 \rangle}{\| x_1 \| \| x_5 \|} = \frac{1}{2}$$

即夹角为 $\theta = \pm 60°$.

10.4 变换矩阵

哈尔小波变换是两个有限维向量空间之间的线性变换，因此，可以用矩阵来表示．本小节将集中讨论这一问题．

212～213

设 A 为变换矩阵，回顾第 4.2 节的讨论我们知道，该矩阵只依赖于变换 f、定义域的基 α 以及值域的基 β. 下面根据第 4.2 节的内容给出求矩阵 A 的算法.

1. 将函数 f 作用于每一个基向量 α_i，求得 $y_i = f(\alpha_i)$.
2. 求 $[y_i]_\beta$，即 y_i 关于值域基 β 的坐标.
3. 变换矩阵由 $[y_i]_\beta$ 的列向量组成，即

$$A = [[y_1]_\beta [y_2]_\beta \cdots [y_n]_\beta] \qquad \text{重写式(4-3)}$$

通常选择基为(好的)正交基．例如，对于具有 4 个采样值的信号，定义它的基为

$$\alpha = \beta = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

对于这样的基，输入信号和输出变换的坐标就是输入和输出向量．也就是说，步骤 2 是自动完成的．为了求出变换矩阵，现在需要确定变换是如何作用于输入信号的．要做到这一点，我们考虑式(10-2)和式(10-3)，即滤波器和下采样运算.

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \qquad \text{重写式(10-2)}$$

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m) \qquad \text{重写式(10-3)}$$

$c_{j+1}(m)$的初始值是要作变换的信号．对于哈尔小波，$h_0(m) = \{1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}\}$，$h_1(m) = \{1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}\}$．这两个运算分别是求和与求差再除以$\sqrt{2}$．假设波形 $v(t)$的长度为 $N=2^j$．我们对所有相邻的采样对进行求和与求差的运算．因为共有 $N/2$ 即 2^{j-1}个这样的对，因此求得第 $j-1$ 层的 $N/2$ 个尺度函数系数和 $N/2$

214

个小波系数. 对第 $j-1$ 层尺度系数执行类似的操作，就可以求得第 $j-2$ 层系数. 依次类推，直到第 $j=0$ 层为止.

在这个过程中，在变换之前原信号有 N 个采样点(或者说有 N 个系数)，而变换之后的系数个数大于 N. 我们只用其中的 N 个，即 c_{00} 和所有的小波系数 d_{jk}. c_{00} 有 1 个系数，第 n 层小波有 2^n 个系数. 将它们相加，得

$$1+\sum_{n=0}^{j-1}2^n = 2^j$$

滤波器 h_0 为低通滤波器(执行求和运算)，h_1 为高通滤波器(执行求差运算). 按 2 下采样选择合适的输出系数. 注意，滤波器 $h_0(-n)$ 和 $h_1(-n)$ 结合了相关和下采样运算.

下面举例说明这一过程. 假设初始系数(或样点)为 4，$c_{2k}=[c_{20}\ c_{21}\ c_{22}\ c_{23}]$，我们把上述过程归纳为以下算法.

1. 求和并下采样得$[c_{10}\ c_{11}]$.
2. 求差并下采样得$[d_{10}\ d_{11}]$.
3. 对 c_{1k} 重复上述步骤，求和并下采样得$[c_{00}]$.
4. 求差并下采样得$[d_{00}]$.

求得的$[c_{00}\ d_{00}\ d_{10}\ d_{11}]$ 4 个系数就构成了原始信号$[c_{20}\ c_{21}\ c_{22}\ c_{23}]$的小波变换.

例 10.5 设 $N=4$，即有 4 个系数 c_{jk} 和 4 个变换系数. 和差运算均是线性的，即变换可以用一个 4×4 的矩阵来表示. 使用通常的基向量求变换矩阵.

解 求方程 $y=Ax$ 中的矩阵 A，其中

$$y=\begin{bmatrix}c_{00}\\d_{00}\\d_{10}\\d_{11}\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}c_{20}\\c_{21}\\c_{22}\\c_{23}\end{bmatrix}$$

215

也就是求矩阵 A，满足

$$y=\begin{bmatrix}c_{00}\\d_{00}\\d_{10}\\d_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{00}&a_{01}&a_{02}&a_{03}\\a_{10}&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{20}&a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{30}&a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{20}\\c_{21}\\c_{22}\\c_{23}\end{bmatrix}$$

根据式(10-2)，系数 c_{00} 是 c_{1k} 的和再除以$\sqrt{2}$，有

$$c_{00}=\frac{c_{10}+c_{11}}{\sqrt{2}}$$

而

$$c_{10}=\frac{c_{20}+c_{21}}{\sqrt{2}} \tag{10-5}$$

且

$$c_{11}=\frac{c_{22}+c_{23}}{\sqrt{2}} \tag{10-6}$$

所以

$$c_{00}=\frac{c_{20}+c_{21}+c_{22}+c_{23}}{2} \tag{10-7}$$

这样，A 的第一行为[1/2 1/2 1/2 1/2]. 同理，用$\{c_{2k}\}$表示 d_{00} 为

$$d_{00}=\frac{c_{10}-c_{11}}{\sqrt{2}}$$

将式(10-5)和式(10-6)代入上式，得

$$d_{00}=\frac{c_{20}+c_{21}-c_{22}-c_{23}}{2} \tag{10-8}$$

用同样的方法，可以用$\{c_{2k}\}$表示 d_{10} 和 d_{11}，得

216

$$d_{10}=\frac{c_{20}-c_{21}}{\sqrt{2}} \tag{10-9}$$

$$d_{11}=\frac{c_{22}-c_{23}}{\sqrt{2}} \tag{10-10}$$

将式(10-7)～式(10-10)写成矩阵形式，得到

$$\begin{bmatrix} c_{00} \\ d_{00} \\ d_{10} \\ d_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{20} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{bmatrix} \tag{10-11}$$

■

练习 10.4 求式(10-11)矩阵的逆，并说明可以从变换系数$[c_{00}\ d_{00}\ d_{10}\ d_{11}]$正确地导出系数$[c_{20}\ c_{21}\ c_{22}\ c_{23}]$.

答案：$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

例 10.6 求长度为 8 的信号的变换矩阵.

解 重复例 10.5 中的步骤. 由系数 c_{3k}求 c_{2k}和 d_{2k}，得

$$c_{20}=\frac{c_{30}+c_{31}}{\sqrt{2}} \qquad d_{20}=\frac{c_{30}-c_{31}}{\sqrt{2}}$$

$$c_{21}=\frac{c_{32}+c_{33}}{\sqrt{2}} \qquad d_{21}=\frac{c_{32}-c_{33}}{\sqrt{2}}$$

217

$$c_{22}=\frac{c_{34}+c_{35}}{\sqrt{2}} \qquad d_{22}=\frac{c_{34}-c_{35}}{\sqrt{2}}$$

$$c_{23}=\frac{c_{36}+c_{37}}{\sqrt{2}} \qquad d_{23}=\frac{c_{36}-c_{37}}{\sqrt{2}}$$

将其代入式(8-21)和式(8-22)得到用 c_{3k}表示的 c_{00}和 d_{00}(变换矩阵的前两行)，为

$$c_{00}=\frac{c_{30}+c_{31}+c_{32}+c_{33}+c_{34}+c_{35}+c_{36}+c_{37}}{2\sqrt{2}}$$

$$d_{00}=\frac{c_{30}+c_{31}+c_{32}+c_{33}-c_{34}-c_{35}-c_{36}-c_{37}}{2\sqrt{2}}$$

又

$$d_{10}=\frac{c_{20}-c_{21}}{\sqrt{2}} \qquad d_{11}=\frac{c_{22}-c_{23}}{\sqrt{2}}$$

将此式与上面的式子联立，得

$$d_{10}=\frac{c_{30}+c_{31}-c_{32}-c_{33}}{2} \qquad d_{11}=\frac{c_{34}+c_{35}-c_{36}-c_{37}}{2}$$

这就求出了变换矩阵的第 3 行和第 4 行. 继续这一过程，求得变换矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

因为 $A^{-1}=A^{t}$，所以它是一个酉矩阵. ■ [218]

第 11 章　小波的应用

小波是小波变换的基函数，就像指数函数$\{e^{j\omega t}\}$是傅里叶变换的基函数一样. 小波系数与傅里叶系数一样可以通过与基函数作内积的方法来计算. 然而，在小波中，我们还可以使用迭代的方法计算小波系数，迭代的每一步对波形采样进行滤波-下采样运算. 当然，这样做的前提是必须有一个合适的滤波器$h_0(n)$，不同的小波使用的滤波器是不同的.

本章将介绍一些实际滤波器的使用，还要介绍小波在模式识别中的一个应用和其他一些实际的例子，以此拓展读者的视野. 因为利用了滤波器和采样率改变，所以小波的实际应用简单得令人吃惊.

本章目标　**读完本章以后，读者应该掌握：**

- 给定一个 FIR 滤波器h_0，求其他 3 个滤波器使它们构成一个 QMF 滤波器组.
- 计算给定信号的小波变换.
- 在模式识别中使用小波降维.

11.1　自上而下的方法

方法 1

第 8.2 节将小波变换分为 3 类：离散小波变换(DWT)、连续小波变换(CWT)和离散时间信号的变换. 它们计算给定信号的小波变换的基本方法都是相同的，都是使用相关运算来进行计算. 其计算步骤可以归纳如下.

1. 从波形的起始点开始，求信号与小波的相关值.
2. 向右平移小波，重复步骤 1. 依次类推，直到整个信号被覆盖为止.
3. 将小波作伸缩，重复步骤 1 和步骤 2.
4. 对所有尺度，重复步骤 1 到步骤 3.

图 11-1 描述了这一过程. 其中的信号是一个带噪正弦信号，两个小波分别代表短的高分辨率小波和长的低分辨率小波. 对于 CWT，我们按下面的方法执行上面的步骤. 将小波放在信号的最左端并计算相关值；然后稍稍向右移动小波重复上面的计算；继续下去，最后得到这个小波的一个相关值连续序列. 下一步，将小波稍作伸缩，沿着波形重复计算在每一点的相关值. 继续这一过程，就

得到一个随尺度变化的相关值连续序列. 连续小波变换的变化域是二维的，一个轴表示平移，另一个轴表示尺度变化.

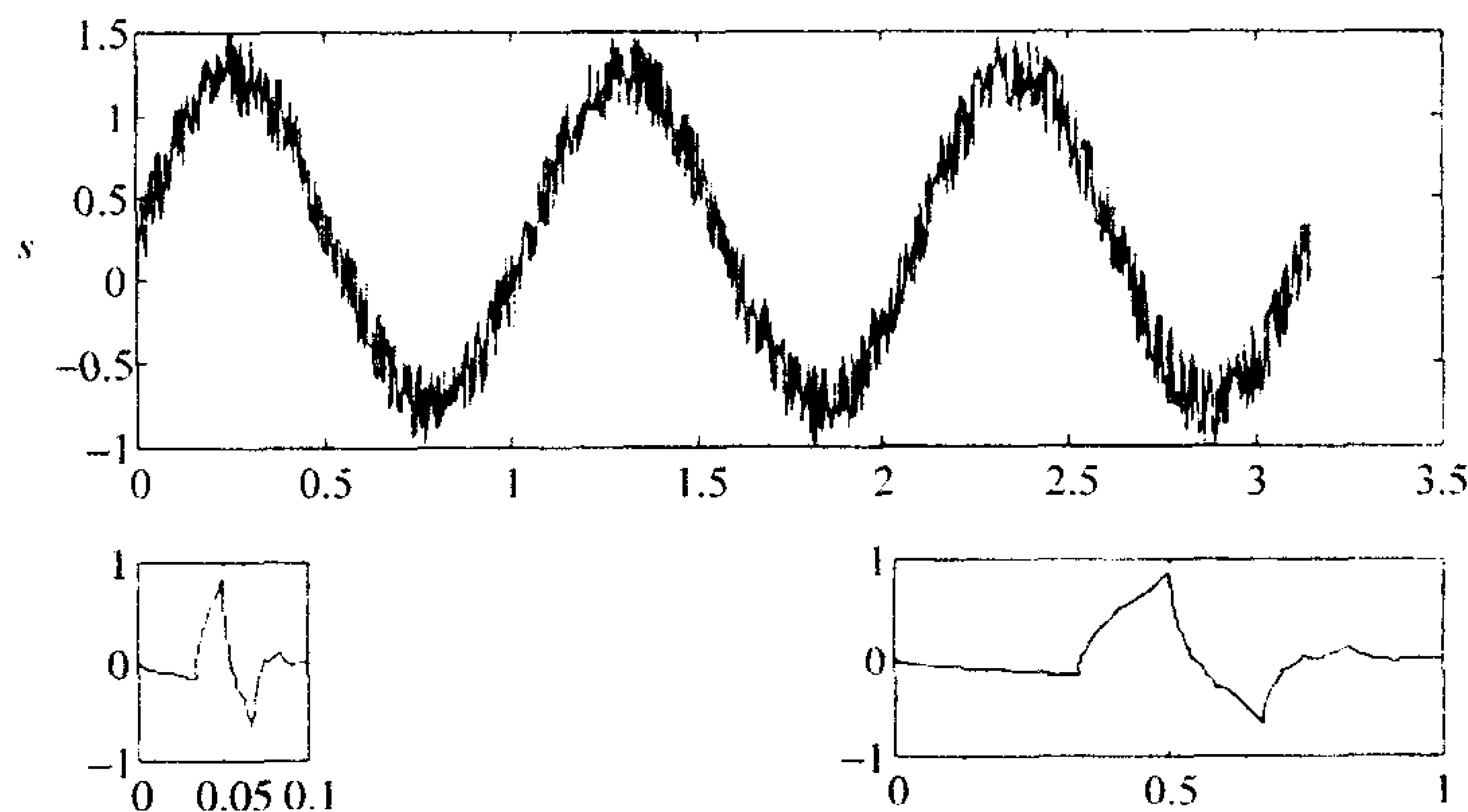


图 11-1 一个信号与两个小波

DWT 的计算方法是类似的，只是每一个步骤的计算都是离散的——平移步长是离散的，伸缩步长也是离散的. DWT 的最终结果是一个二维离散域.（当然，第 3 类变换，即离散时间信号的变换，也是一样的，因为其计算是对一个个样本进行的.）利用 DWT 计算所得的离散步长的平移和相关值，不会丢失任何信息. 尽管如此，在实际应用中，我们还是使用方法 2. 220

方法 2

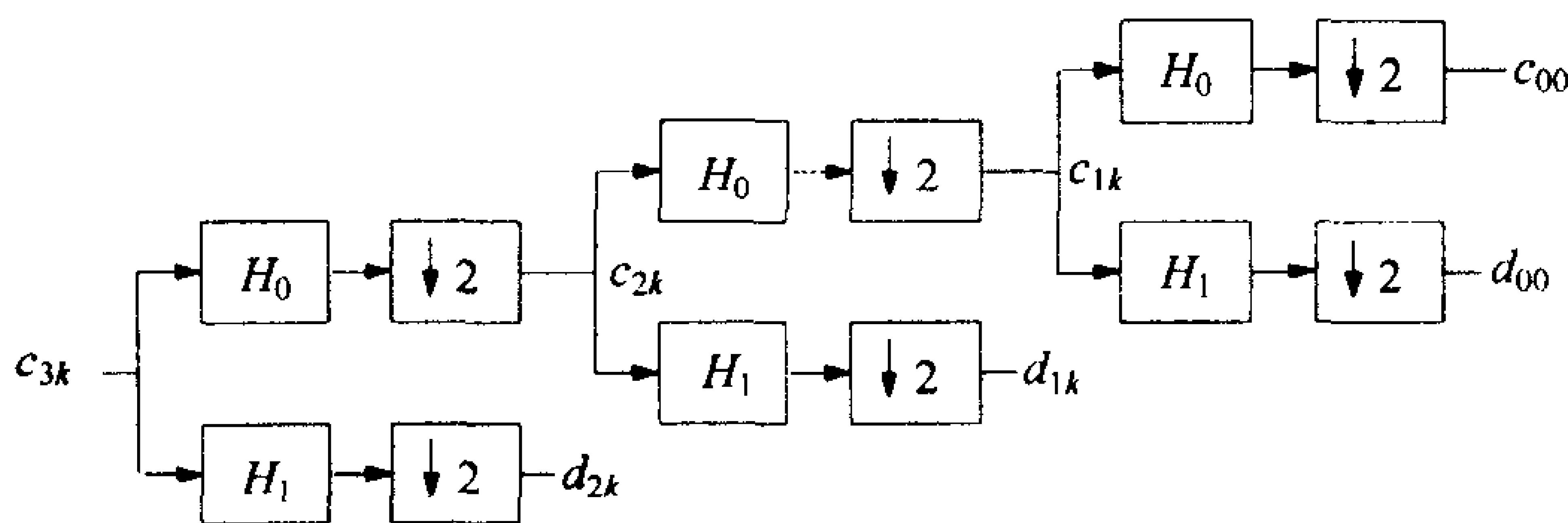
式(10-2)和式(10-3)给出了尺度函数 c_{j+1} 与它下一层尺度函数 c_j 和小波 d_j 之间的关系. 注意，这两个关系式涉及滤波器 h_0 和 h_1. 因为采样值就是初始尺度函数系数，因此对于给定的滤波器，利用这两个式子就可以由信号的采样值求出小波系数.

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \qquad \text{重写式(10-2)}$$

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m) \qquad \text{重写式(10-3)}$$

我们将图 10-7 重画在这里，它描述了基于 2 的幂选择尺度和位置(即二进尺度(dyadic scales)和二进位置(dyadic positions))的一般格式. 这个格式适用于任意长度的滤波器，包括哈尔滤波器. 下面我们就以 db(2)滤波器为例来说明在实际中是怎样使用方法 2 来计算 DWT 的.

1. 首先，产生一个长度为 1 024 的带噪信号 s. 信号的初始长度可以不是 2 的整数次幂，但是选择 2 的整数次幂可以使操作更为方便.



重画图 10-7

```
N=1024;
t=linspace(0,pi,N);
s=sin(20.*t)+0.5*rand(1,N);
```

221

2. 定义滤波器 h_0 和 h_1. 这里使用 db(2)滤波器.

```
h0=[0.3415 0.5915 0.1585 -0.0915];
h1=[-0.0915 -0.1585 0.5915 -0.3415];
```

3. 对信号 s 滤波并下采样得到序列 c 和 d.

```
s0=conv(h0,s);
s1=conv(h1,s);
s0=s0(1,2:N+1); ←消去第一个值
s1=s1(1,2:N+1); ←
s0=reshape(s0,2,N/2); ←下采样
s1=reshape(s1,2,N/2); ←
c=s0(1,:); ←输出c的长度为512
d=s1(1,:); ←输出d的长度为512
```

上述操作得到如图 11-2 所示的信号. 其中最上方的信号 s 包含 1 024 个样本，但是由于进行了下采样，所求得的两个信号 c 和 d 的长度均为 512. 信号 s 是第 1 阶段的输入，在图 10-7 中标记为 c_{3k}，而 c 和 d 为输出，标记为 c_{2k}和 d_{2k}. 信号 d 是这一层的小波系数，按照图 10-7 的标记方法，它应该被记为 d_{9k}，因为 d_{9k}有 512 个值.

练习 11.1　d_{7k}，d_{5k}，d_{3k}各包含多少个样点?

答案：$2^7=128$，$2^5=32$，$2^3=8$.

按照图 10-7 继续这一过程，对尺度函数系数 c_{9k}进行运算得到 c_{8k}和 d_{8k}，也就是令 $N=512$，$s=c_{9k}$，重复上面的步骤 3. 由此得到图 11-3 所示的“第 2 层迭代”. 其中的信号 c 和 d 各包含 256 个样点，应分别标记为 c_{8k}和 d_{8k}.

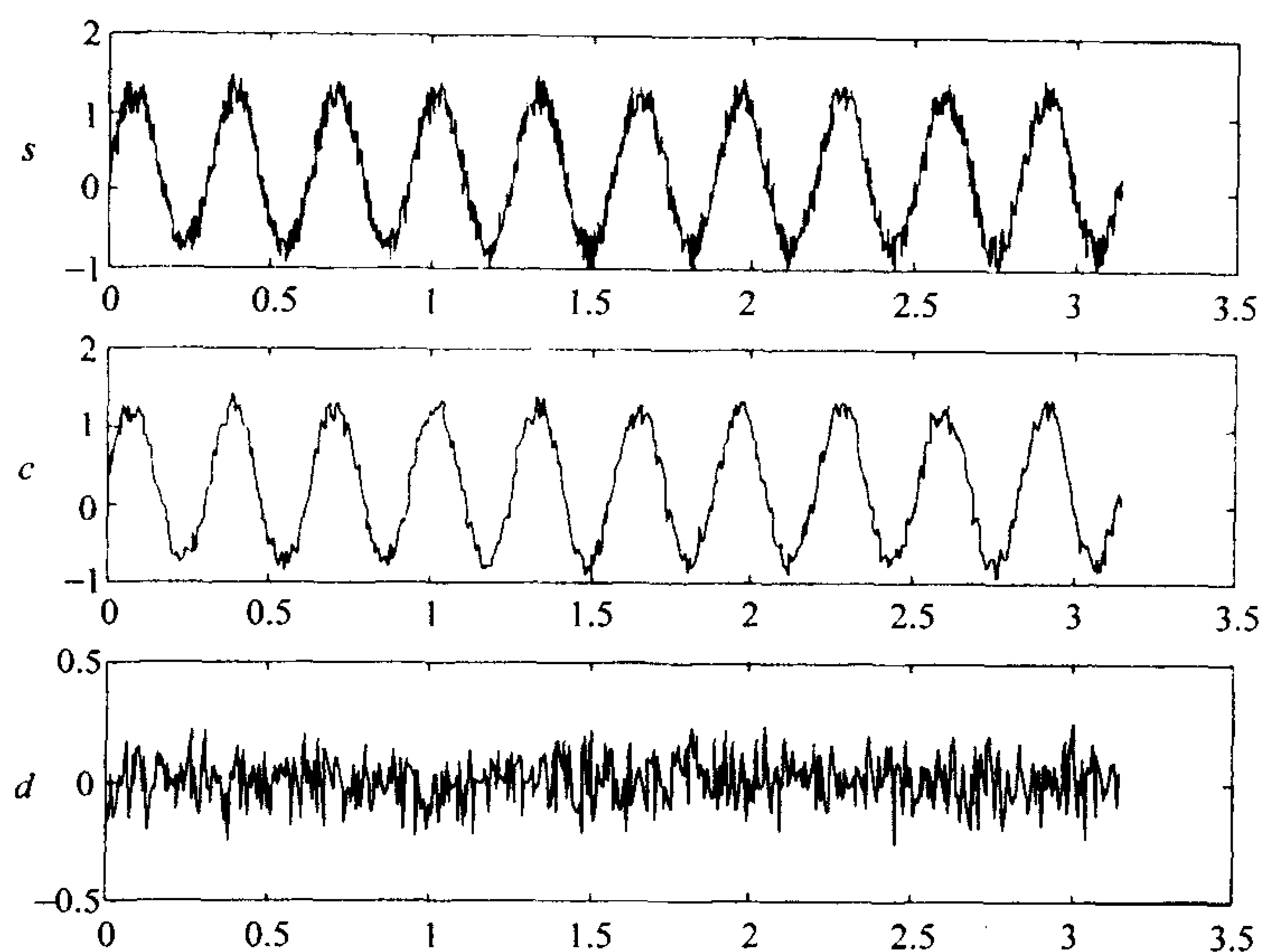


图 11-2　第 1 层迭代：信号 s，c，d

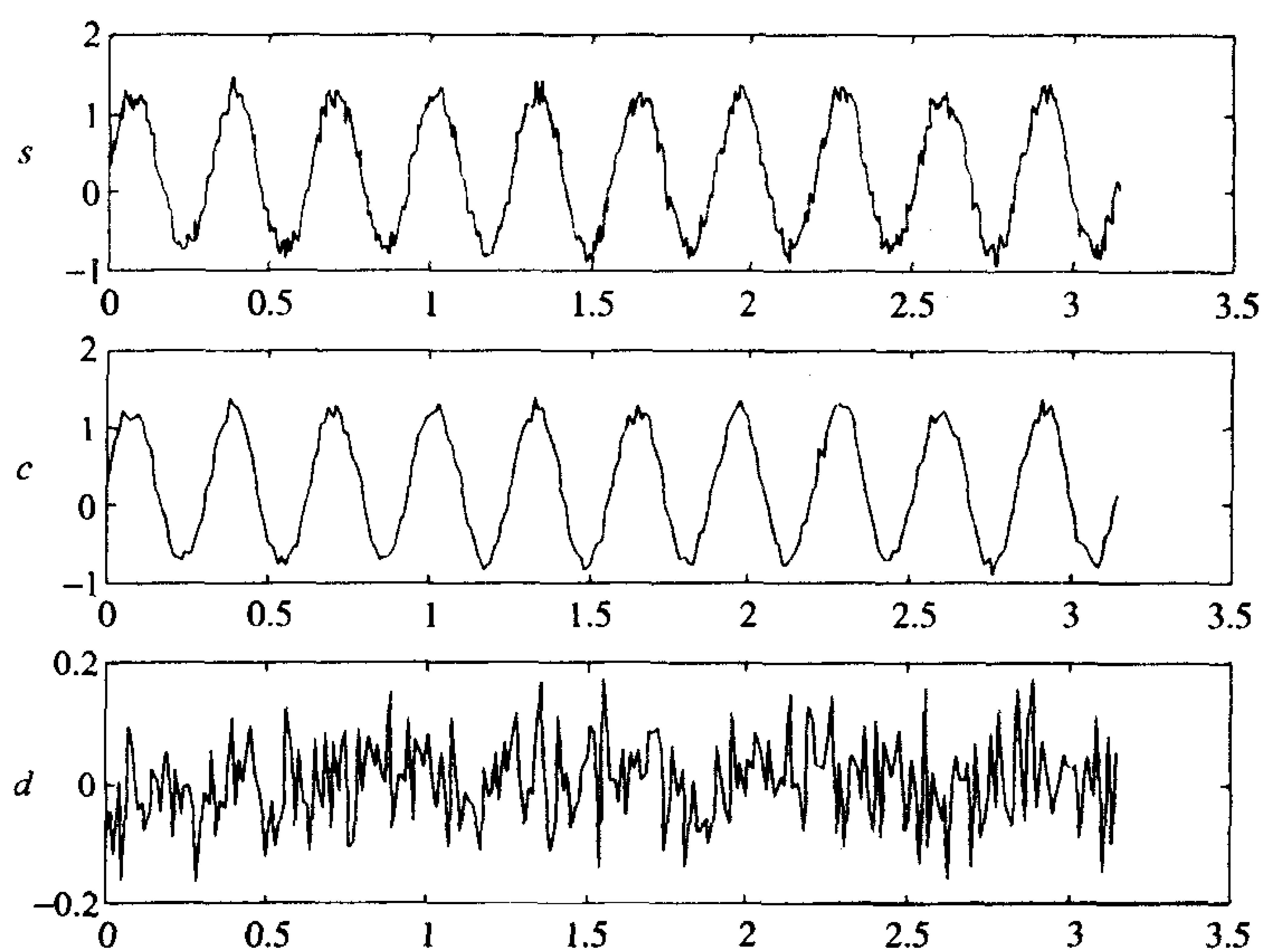


图 11-3　第 2 层迭代

图 11-4 所示为第 3 层迭代的结果．其中的信号 c 和 d 分别为 c_{7k} 和 d_{7k}，它们各包含 128 个样点．从总体趋势不难看出，信号 c 变得越来越像原始信号中的正弦部分，每一层迭代都从信号中抽取越来越多的噪声．这个例子说明了小

波在信号处理中的第一个也是最明显的一个应用，即去噪(de-noising). 不要认为这一迭代处理的次数越多，信号中的噪声就会去除得越干净. 图 11-4 展示了对这个信号最有用的处理，如果再多进行一两次迭代，信号 c 将会变得像噪声一样.

222～223

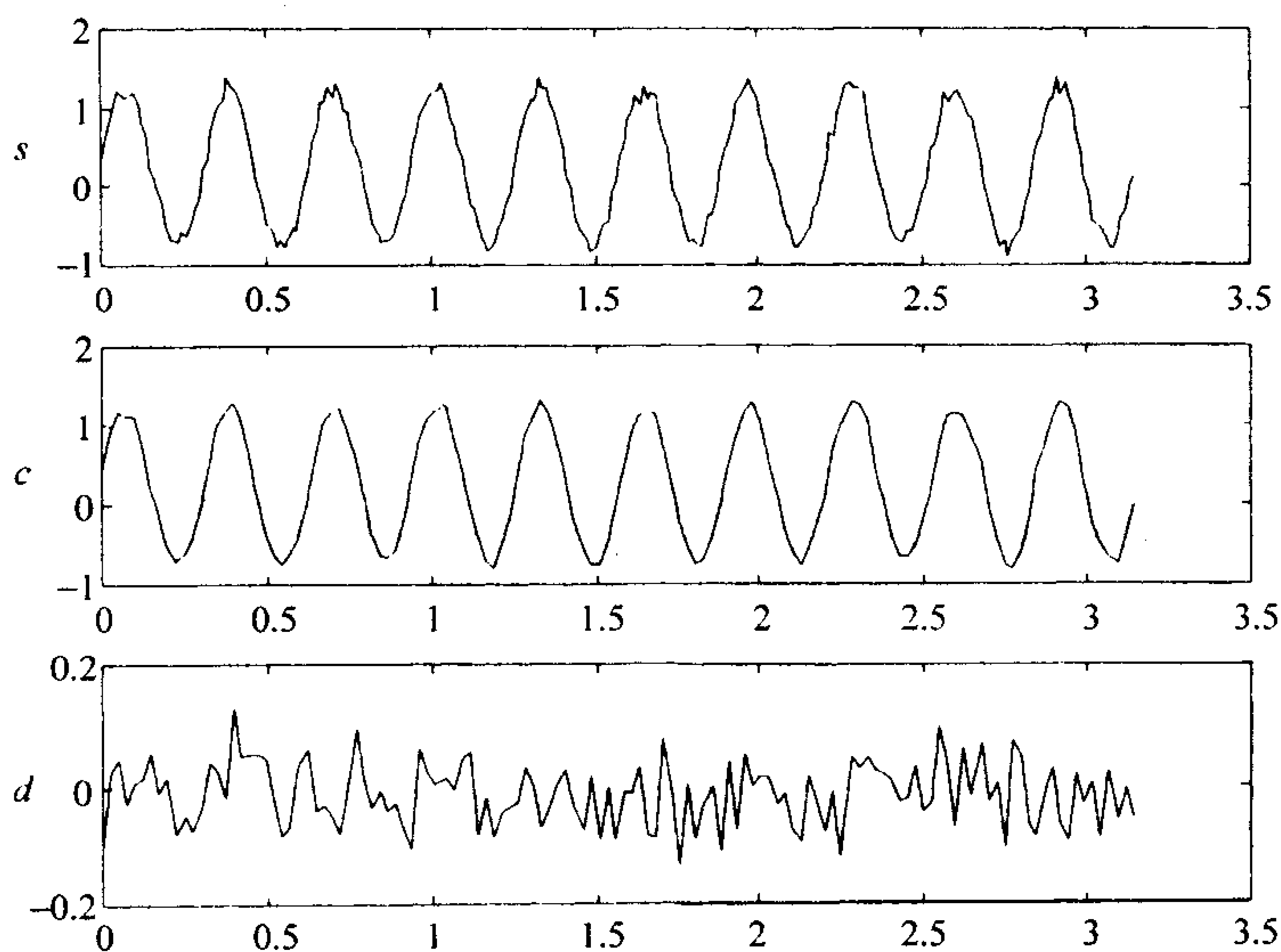


图 11-4 第 3 层迭代

图 11-5 给出了至此为止的层次关系. 长度为 1 024 的信号 s 产生如图 11-2 所示的 c_{9k} 和 d_{9k}(第 1 层迭代)，然后由 c_{9k} 由产生如图 11-3 所示的 c_{8k} 和 d_{8k}(第 2 层迭代)，重复上述过程又产生图 11-4 所示的 c_{7k} 和 d_{7k}. 由于再往下迭代所得到的 c 信号将变得像噪声一样，所以迭代就此停止. 随之而来的问题是：这个过程是否可逆，从而能够恢复原始信号(即由 c_{7k} 和 d_{7k} 开始反向计算得到 c_{8k}，c_{9k}，最后得到信号 s)？回答是：只要知道 d_{8k} 和 d_{9k} 就行.

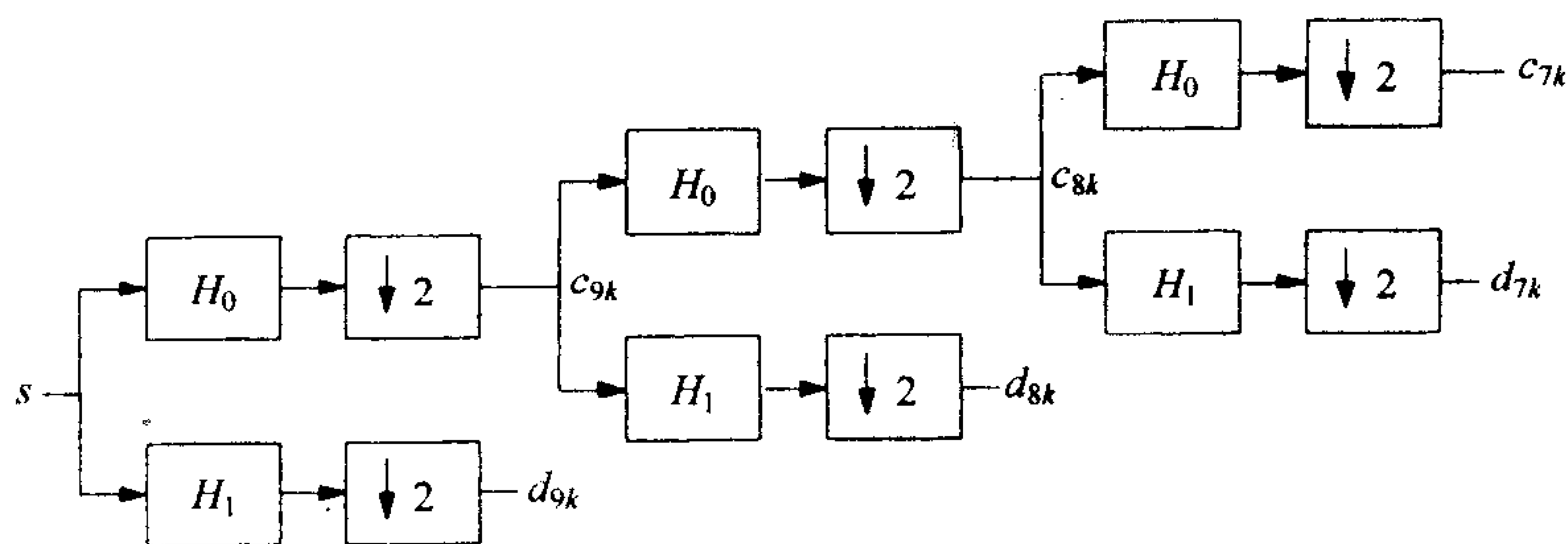


图 11-5 图 11-2 至图 11-4 的处理示意图

我们先作个简单的计算. c_{7k}有 $2^7=128$ 个系数，d_{7k}也有相同个数的系数. d_{8k}的系数是 256 个，d_{9k}的系数是 512 个. 所有这些系数相加总共是 1 024 个系数，与原始信号的样点个数刚好相同，正是可以用于恢复原始信号信息的数目. 问题的关键在于完全重构滤波器，也就是第 9 章中的 QMF 滤波器组. 式(9-21)给出了构造这样的滤波器组的一般方法，为了便于叙述，我们重写如下.

如果

$$h_0(n)=[a_0\ a_1\ a_2\ a_3]$$

那么

$$h_1(n)=[a_3\ -a_2\ a_1\ -a_0] \qquad \text{重写式(9-21)}$$

$$h_2(n)=[a_3\ a_2\ a_1\ a_0]$$

$$h_3(n)=[-a_0\ a_1\ -a_2\ a_3]$$

现在我们由小波变换重构信号 s. 图 11-6 是重构信号的流程示意图. 从 c_{7k}和 d_{7k}开始，经过上采样、滤波再求和得到 c_{8k}. 对 c_{8k}和 d_{8k}上采样、滤波再求和得到 c_{9k}. 最终，对 c_{9k}和 d_{9k}上采样、滤波再求和得到信号 s.

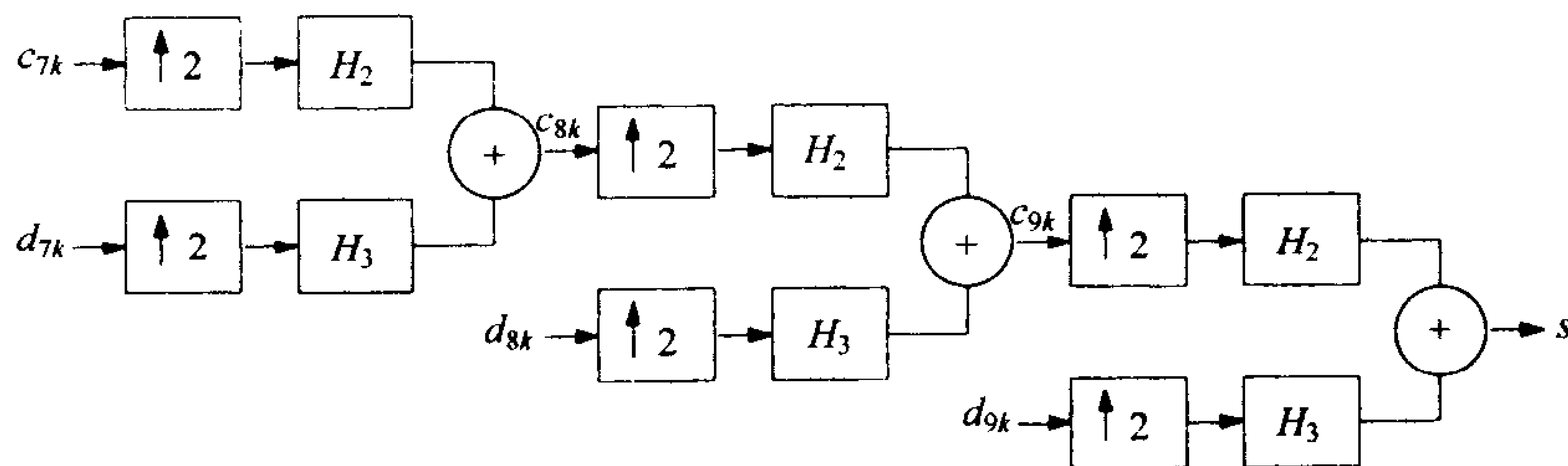


图 11-6 小波逆变换

下面的程序段用在图 11-6 的各个阶段中.

1. 由 c_{7k}和 d_{7k}重构信号 c_{8k}.

```
da=[d7
 zeros(size(d7))]; % 增加零的行
db=da(:)';     % 插入交互零
dc=conv(db,h3); % 上采样和滤波后的 d7
ca=[c7
 zeros(size(c7))];
cb=ca(:)';
cc=conv(cb,h2); % 上采样和滤波后的 c7
c8=2*(cc+dc); % 标准化后的 c8(259)
n=length(c8); % 由于 ↑2 和卷积得到奇数长度
c8=c8(1,2:n-2); %长度还原至256
```

224~225

2. 由 c_{8k} 和 d_{8k} 重构信号 c_{9k}.

```
da=[d8;  zeros(size(d8))];
db=da(:)';
dc=conv(db,h3); % 上采样和滤波后的 d8
ca=[c8;  zeros(size(c8))];
cb=ca(:)';
cc=conv(cb,h2); % 上采样和滤波后的 c8
c9=2*(cc+dc); % 标准化后的 c9(515)
n=length(c9);
c9=c9(1,2:n-2); %长度还原至512
```

3. 由 c_{9k} 和 d_{9k} 重构信号 s.

```
da=[d9;  zeros(size(d9))];
db=da(:)';
dc=conv(db,h3); % 上采样和滤波后的 d9
ca=[c9;  zeros(size(c9))];
cb=ca(:)';
cc=conv(cb,h2); % 上采样和滤波后的 c9
s=2*(cc+dc); % s(1027)
n=length(s);
s=s(1,2:n-2); % 长度还原至1024
```

4. 画信号 s，c_{9k} 和 d_{9k}，得到图 11-7.

```
t=linspace(0,pi,length(s));
subplot(3,1,1)
plot(t,s)
ylabel('s')
title('Reconstructed Signal')
t1=linspace(0,pi,length(c9));
subplot(3,1,2)
plot(t1,c9)
ylabel('c9')
subplot(3,1,3)
plot(t1,d9)
ylabel('d9')
```

226

由于我们使用的是完全重构滤波器，所以最后重构的信号应与图 11-2 中的信号相同. 比较表明，二者重合得很好，只在某些局部存在很小的差异，这些差异是由于舍入误差导致的.

考虑在第 8 章中所用方法与上述方法的差异. 第 8 章中所用方法可以称为从下往上的方法，它先算 φ_{00} 和 ψ_{00}，然后再算 φ_{10}，φ_{11}，ψ_{10} 和 ψ_{11}，依次类推. 而现在的方法则是从另外一端开始的. 从 1 024 个样点的信号开始，计算 512 个 φ_{9k} 和 ψ_{9k} 的值，接下来是 256 个 φ_{8k} 和 ψ_{8k} 的值，依次类推. 这是一种自上而下的方法，其计算方法由式(10-2)和式(10-3)给出.

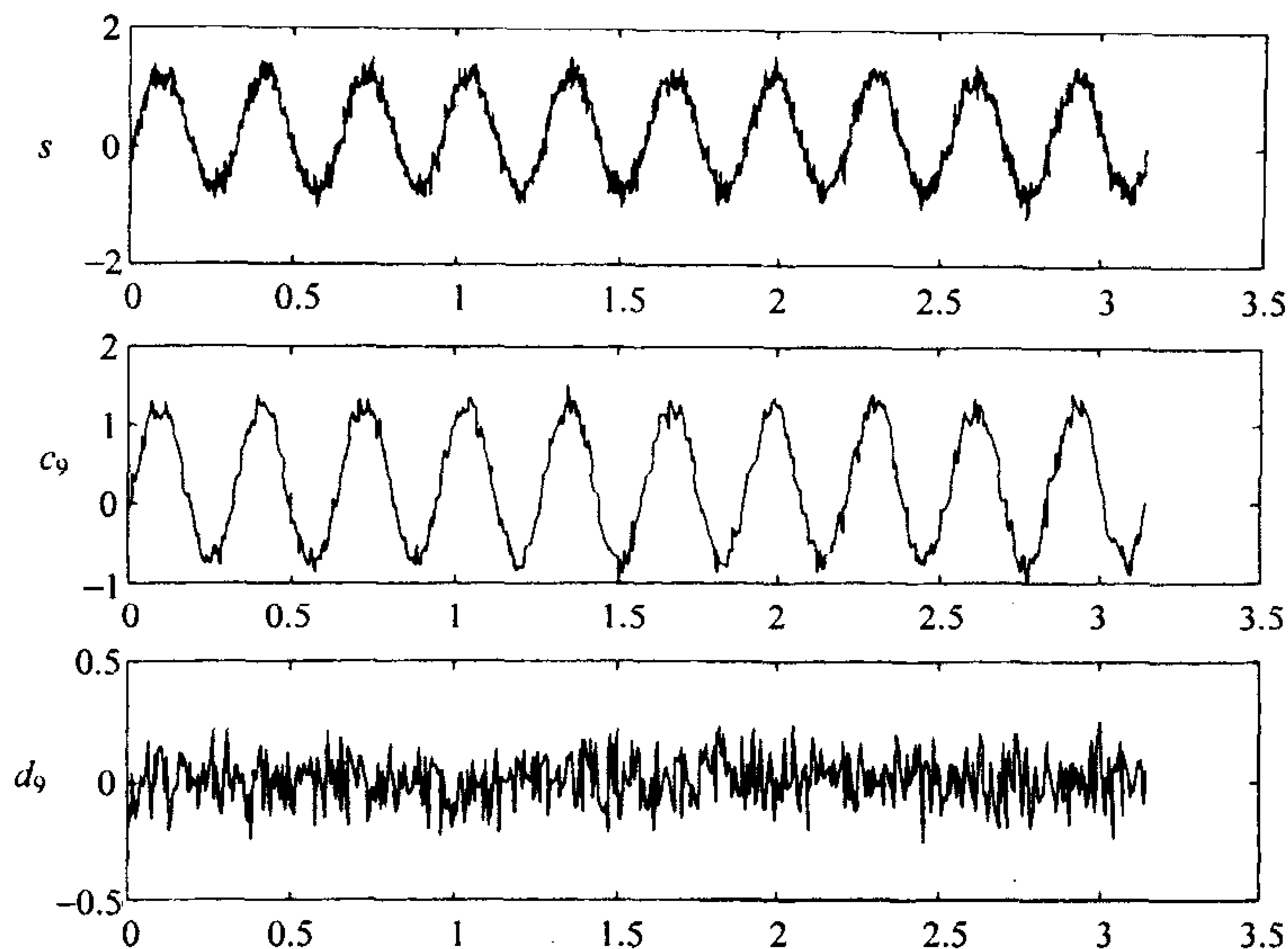


图 11-7 重构信号

11.2 模式识别

人类可以识别图像中的物体，这对于机器而言却是困难的．通常的识别过程是先从图像中提取物体的特征，然后再与已知物体匹配．特征可以有多种形式，可以提取某些点和线，也可以使用某些变换特征．提取特征的目的是减少图像的数据量(维度)同时又保留其本质信息．使用傅里叶变换的最大(指幅值)系数，可以降低图像的维度，同时又保留图像的大部分"能量"．当然，这里的前提是图像的大部分信息都包含在变换的高能量分量中．

227

将小波变换应用到模式识别中可以得到好的效果．给定一幅 16×16 的图像，求它的二维哈尔小波变换．按照下面的方案选取 80 个(从 256 个中)系数．首先抽取系数矩阵左上角的 8×8 子矩阵上的 64 个系数．剩下的 16 个系数由(1)系数矩阵右上角 8×8 子矩阵的对角元素和(2)系数矩阵左下角 8×8 子矩阵的对角元素组成．一旦所有图像都被转换为这 80 个特征，就可以用下面的距离度量来对它们进行比较．也就是说，相似的图像之间应该有小的距离．两个图像 u 和 v 的度量或距离定义为

$$d(u,v)=\sum_{i=1}^{64}w_1\mid u_i-v_i\mid+\sum_{i=65}^{80}w_2\mid u_i-v_i\mid \tag{11-1}$$

其中 w_1 和 w_2 为加权系数．加权系数需要合理地选择以使得识别效果达到最优．一般地，取 $w_1=1$，$w_2=1/4$．

例 11.1 将上面的方法应用到图 11-8 的 4 个图像 A，B，C，D 上. 利用式(11-1)的第一个和式作为距离，并取 $w_1=1$，求任意两个图像之间的距离.

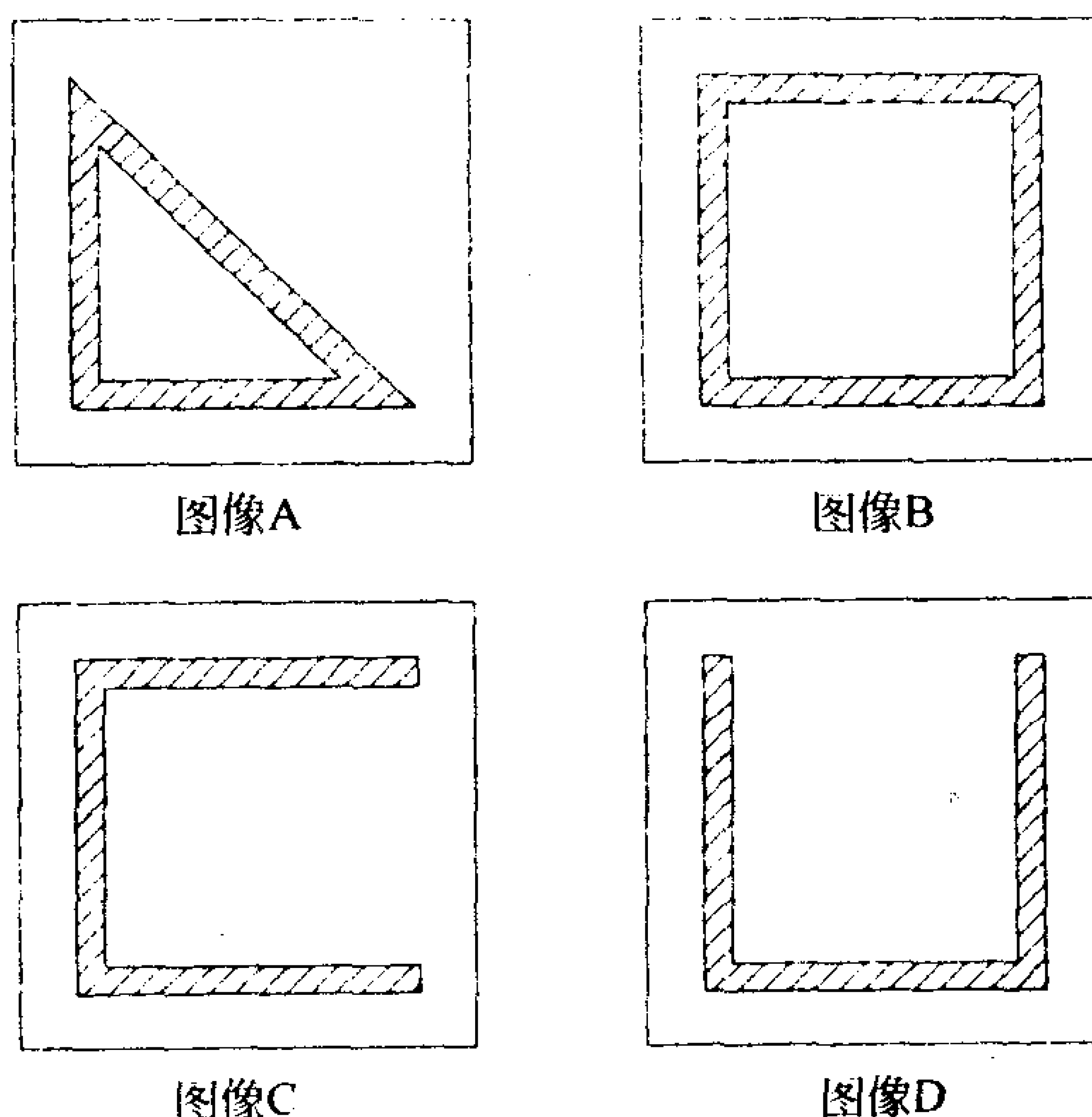


图 11-8 例 11.1 中的图像模式

解 将图像转换为 MATLAB 中的矩阵. 定义 16×16 的矩阵 A，B，C，D，矩阵元素为 1 表示图中的阴影部分，为 0 表示空白部分. 例如，矩阵 A 为

228

```
A=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0
   0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
   0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```

类似地定义矩阵 B，C，D. 下一步是求二维哈尔小波变换. 因为本例中矩阵的维度较小，所以我们使用变换矩阵，它可根据第 10.4 节归纳的方法求得. 设

$$p=\frac{1}{4}\quad q=\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad r=\frac{1}{2}\quad s=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

则变换矩阵 W 为

```
W=[p p p p p p p p p p p p p p p p
  p p p p p p p p -p -p -p -p -p -p -p -p
  q q q q -q -q -q -q 0 0 0 0 0 0 0 0
  0 0 0 0 0 0 0 0 q q q q -q -q -q -q
  r r -r -r 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  0 0 0 0 r r -r -r 0 0 0 0 0 0 0 0
  0 0 0 0 0 0 0 0 r r -r -r 0 0 0 0
  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 r r -r -r
  s -s 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  0 0 s -s 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  0 0 0 0 s -s 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  0 0 0 0 0 0 s -s 0 0 0 0 0 0 0 0
  0 0 0 0 0 0 0 0 s -s 0 0 0 0 0 0
  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 s -s 0 0 0 0
  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 s -s 0 0
  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 s -s];
```

229

将 W 与 A 相乘求列变换

$$y = W * A \tag{11-2a}$$

然后求行变换

$$x = W * y' \tag{11-2b}$$

得到 A 的二维小波变换. 下一步，我们选取每一个图像模式的变换矩阵的左上 8×8子矩阵并比较它们之间的距离. 在式(11-1)中取 $w_1=1$，$w_2=0$，得

$$d(A,B) = 38.97 \qquad d(A,C) = 31.74$$

$$d(A,D) = 31.74 \qquad d(B,C) = 13.07$$

$$d(B,D) = 13.07 \qquad d(C,D) = 22.14$$

得到的这些距离“看”起来是正确的. 注意，$d(A, C)=d(A, D)$，这与我们的直观观察是一致的. 此外，$d(B, C)=d(B, D)$也一样. 假如直接比较 64×64 大小的原图，我们也会期望得到同样的结果. 只使用每一个图像的 64 个变换系数来度量距离，这意味着大大地节省了机器时间. 这个方法对于大尺寸的图像可以得到很好的效果. 比如 128×128 的图像只使用不到 100 个变换系数进行比较. 这使得我们可以在一个合理的时间内从一个大型数据库中搜索一幅特殊的图像. ■

11.3 隐含的奇性

小波可以检测到隐含在函数导数中的信息，下面举例说明. 这个例子是由韦恩·加利(Wayne Galli)和奥列·尼尔森(Ole Nielson)提出的，在这个例子中，

小波分解能够检测到一个不能直接从原始信号中察觉的特征．考虑函数

$$f(t)=\begin{cases} t^3/6, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2} \\ t^3/6-t^2/2+t/2-1/8, & 0\leqslant \dfrac{1}{2}<1 \end{cases}$$

230 它的一阶导数为

$$f'(t)=\begin{cases} t^2/2, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2} \\ t^2/2-t+1/2, & 0\leqslant \dfrac{1}{2}<1 \end{cases}$$

二阶导数为

$$f'(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2} \\ t-1, & 0\leqslant \dfrac{1}{2}<1 \end{cases}$$

图 11-9 画出了样本数为 1 024 时这 3 个函数的曲线．可以看到，原函数在 $t=1/2$ 处是连续且光滑的，其一阶导数在此处连续，但二阶导数不连续．

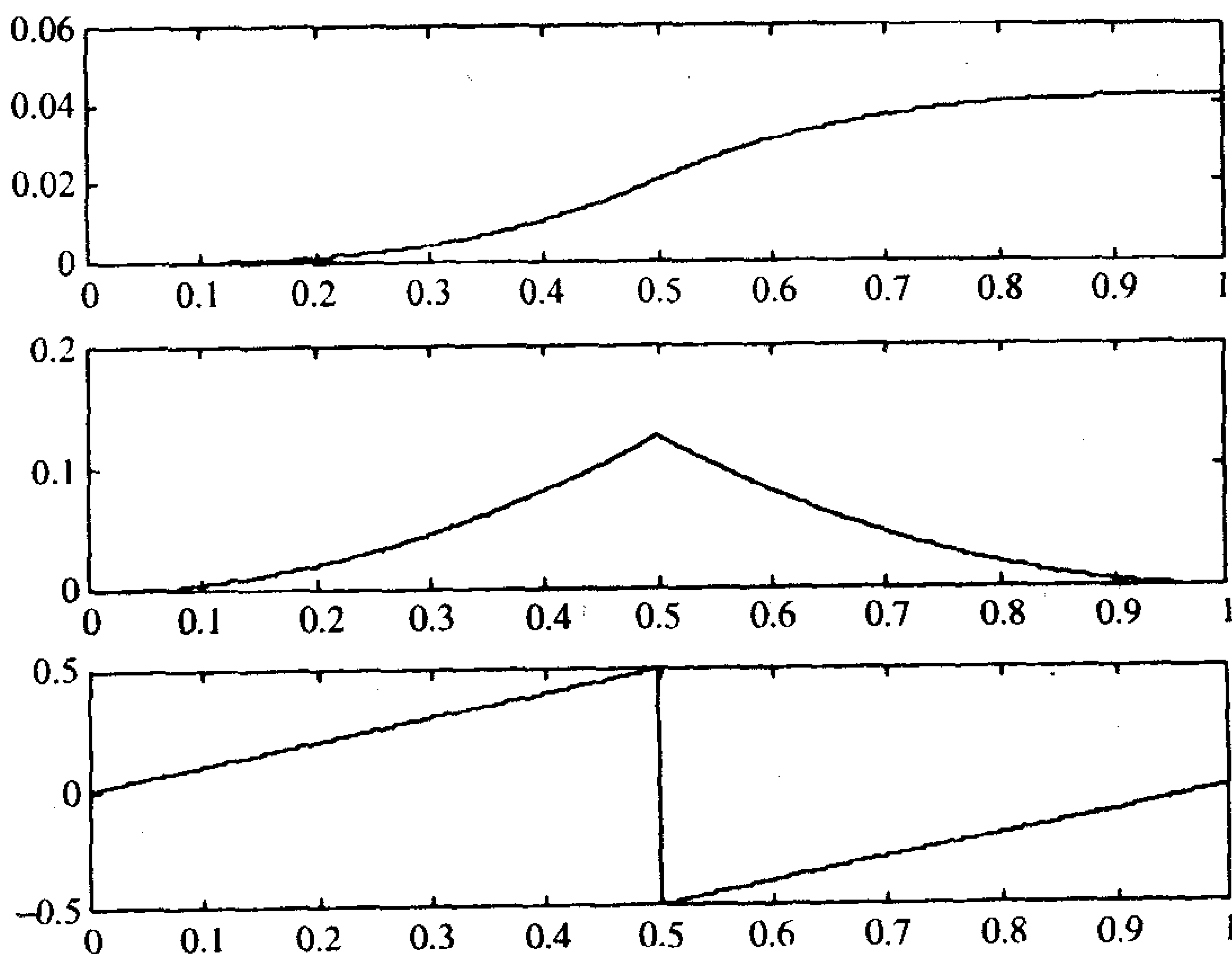


图 11-9 函数 $f(t)$和它的导数

图 11-10 是它的小波分解. 最上方是原始信号，接下来分别是 d_9(包含 512 个样点)，d_8(包含 256 个样点)，d_7(包含 128 个样点). 在这个例子中，我们使用的是带 8 个系数的 db(4)小波. 我们看到，由于二阶导数不连续，导致小波在 $t=1/2$处发生剧烈变化. 231

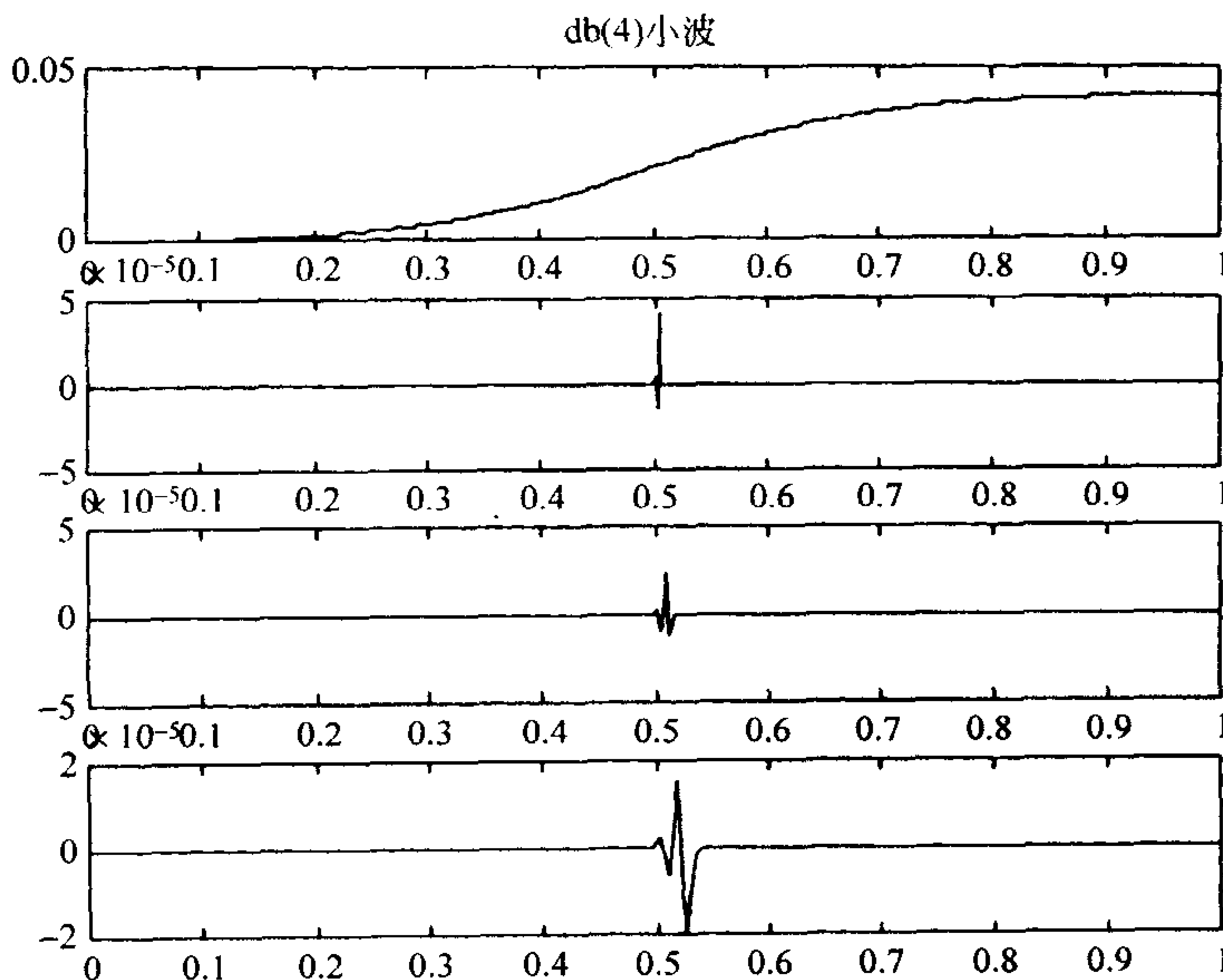


图 11-10 用小波揭示出二阶导数不连续点的位置

11.4 数据压缩

从已有的文献来看，数据压缩是小波应用最广泛的一个领域. FBI 指纹图像压缩标准就是使用小波来压缩指纹数据库的. FBI 搜集了自 1924 年以来的指纹卡，数量超过 2 亿张，所使用的文件柜在华盛顿特区的 J. Edgar Hoover 大楼占地 1 英亩左右. 每次比对一个指纹需要检查大约 29 000 000 张指纹卡.

FBI 的数字指纹的分辨率为每英寸采样 500 个点，8 位灰度模式. 一张指纹卡(包含 10 个手指)包含大约 10 MB 数据. 用 32 kB 的速率传送一张指纹卡需要 30 多分钟，所以需要进行数据压缩. 无损数据压缩当然是首选的方法，但是在实际中，无损数据压缩的压缩率不高于 2 : 1. 因此，有损压缩逐渐引起人们的注意，这也是小波最开始在图像中的应用. 232

新的 ISO JPEG 标准适用于任何格式的图像，但是实验表明它损失了一些重要的细节信息，使得图像呈现马赛克效应. FBI 的指纹专家更喜欢使用小波，因为它完整地保留了一些图像的细节信息而不会出现马赛克效应. 它使图像变得稍稍模糊但不出现马赛克，这对用户来说会好接受一些.

有损数据压缩的基本思想是去掉图像(或信号)中的低能量分量而保留高能量数据，或者去掉高频数据而保留低频数据，或者将两者结合起来. 采用何种方式由具体应用决定，而小波使得这种选择易于实现. 下面我们给出如图 11-8 所示的图形进行实验的结果.

图 11-11 是图像 A 和它的压缩变换. 其思想是使用式(11-2a)和式(11-2b)求小波正变换并将左上角以外的区域全部置零. 这相当于将图像压缩成一个 8×8 的矩阵，因此压缩率为 4 : 1. 为了考察这样做对原图像会产生多大的损害，我们按下面的步骤进行逆运算.

0 0 0

图像A 压缩变换

图 11-11 为了压缩 16×16 的图像 A，保持小波变换的左上角区域的数据不变，其他地方均置零

小波变换矩阵是酉矩阵，它的逆就是转置，即

$$W^{-1} = W^{t}$$

233 若 x 是 A 的变换，其大小为 16×16(由式(11-2b)求得)，那么逆变换为

$$y = W^{t} * x \tag{11-3a}$$

$$A = W^{t} * y^{t} \tag{11-3b}$$

这些运算正好是式(11-2)的逆运算. 令符号 p 表示 0.75，那么重构的图像为

```
A=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 p p 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 p p 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 p p 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 p p 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 p p p p 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 p p p p 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 p p p 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 p p p 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 0 p p p p 0 0 0 0
   0 0 1 1 0 0 0 0 p p p p 0 0 0 0
   0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 p p 0 0
   0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 p p 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```

我们可以看到，对角元素的幅度值减小了，宽度扩展了 1 到 2 个像素. 除此之外，图像没有改变.

这个略显粗糙的例子显示了用简单方法达成的一种图像压缩形变. 对于大幅图像，通过对这一过程进行细致的调整，可以在压缩率为 9：1 甚至更高的情况下得到满意的重构图像.

234

索　　引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

---

[1] ff 指脚注. ——编辑注

H

I

J

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W